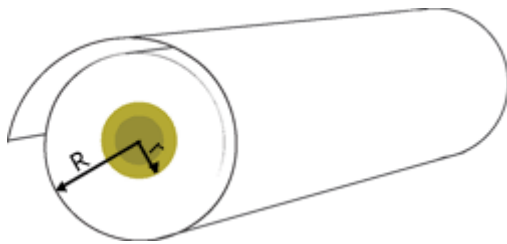


El rotlle de paper

Un grup d'estudiants van al supermercat a fer la compra per tot el mes, quan passen per l'estant dels papers de cuina troben una bona oferta d'un paper de cuina que no han fet servir mai. És massa barat per què sigui bo i el comparen amb una marca coneguda adonant-se de què el gruix és el mateix i que el paper conegut conté 30 metres de paper, seria interessant saber la quantitat de paper enrotllat en aquest rotlle, sense recórrer a desenrotllar-lo i poder així decidir-se.



Situació:

Tenim un rotlle de paper i volem saber la longitud total del paper .

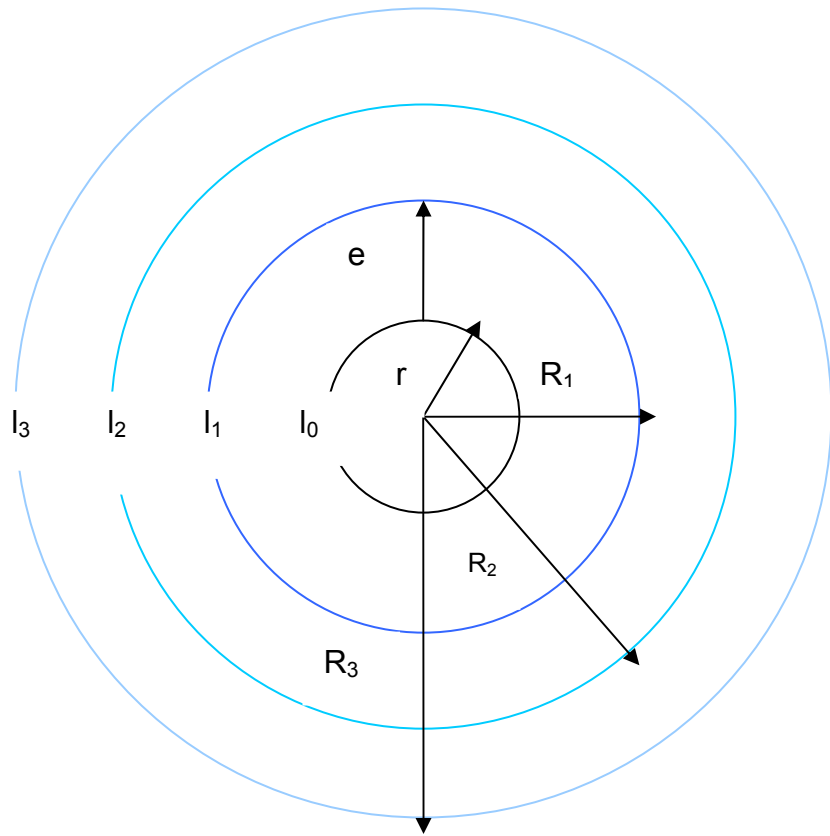
Les dades són:

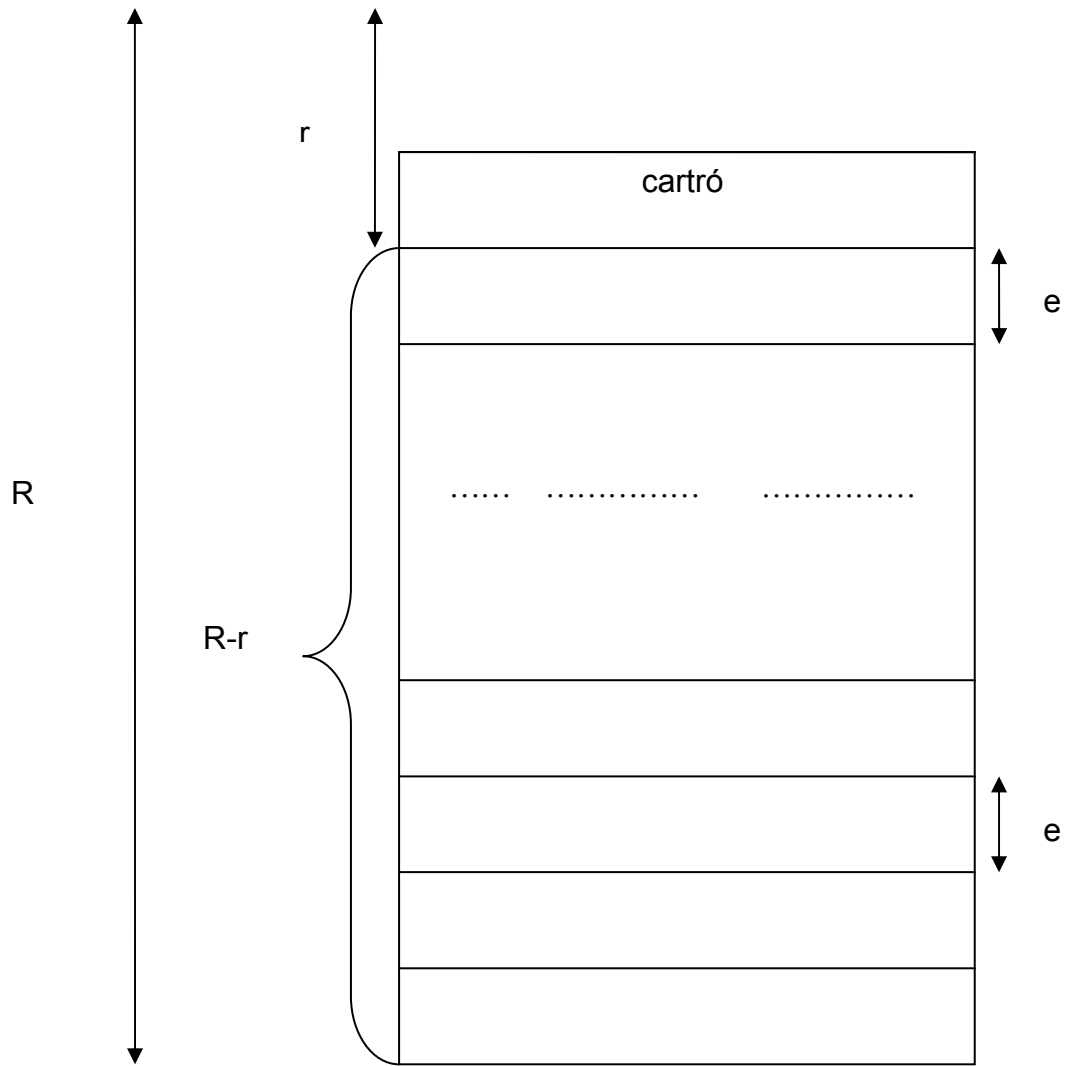
$r = \text{radi fins l'exterior del cilindre de cartró} = 4.7 \text{ cm}$

$R = \text{radi total exterior} = 10 \text{ cm}$

$e = \text{gruix del paper} = 0.07 \text{ cm}$

Model geomètric: Cercles concèntrics





$n = n^\circ \text{ de voltes} = n^\circ \text{ de capes}$

$$n \cdot e = R - r \Rightarrow n = \frac{R - r}{e}$$

Raonament 1:

Model matemàtic per resoldre la situació: progressions aritmètiques

$$\text{Longitud 1ª volta: } 2 \cdot \pi(r + e) = l_1$$

$$\text{Longitud 2ª vota: } 2 \cdot \pi(r + 2 \cdot e) = l_2$$

.....

$$\text{Longitud n voltes: } 2 \cdot \pi(r + n \cdot e) = l_n$$

$$L_n = \text{longitud total} = l_1 + l_2 + \dots + l_n = 2 \cdot \pi(n \cdot r + e(1 + \dots + n)) =$$

$$= 2 \cdot \pi \left(n \cdot r + e \frac{(1+n) \cdot n}{2} \right) = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r + \pi \cdot e(1+n) \cdot n =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r + \pi(e + e \cdot n)n = 2 \cdot \pi \cdot \frac{R-r}{e} \cdot r + \pi(e + (R-r)) \cdot n =$$

↑

$$n = \frac{R-r}{e}$$

$$= \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{e} \cdot (e-r) + \pi \cdot (e \cdot (R-r)) \cdot \frac{R-r}{e}$$

$$= \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{e} (R-r) + \pi \cdot (R-r) + \frac{\pi}{e} \cdot (R-r)^2$$

$$= \frac{2 \cdot \pi \cdot r + \pi \cdot e}{e} (R-r) + \frac{\pi}{e} \cdot (R-r)^2$$

$$r = 4.7 \text{ cm}$$

$$\text{Fent } R = 10 \text{ cm} \quad \text{S' obté } 3513.2431 \text{ cm} \cong 35.13 \text{ m}$$

$$e = 0.07 \text{ cm}$$

Raonament 2:

Model recurrent

$r = \text{radi fins l'exterior del cilindre de cartró} = 4.7 \text{ cm}$

$R = \text{radi total exterior} = 10 \text{ cm}$

$e = \text{gruix del paper} = 0.07 \text{ cm}$

L_k voldrà dir la longitud total de les k primeres voltes, es a dir :
 $L_K = l_1 + l_2 + \dots + l_k$

$$R_0$$
$$l_0 = 2 \cdot \pi \cdot \overbrace{(4.7 + 0.07)}^{R_1}$$

$$l_1 = 2 \cdot \pi \cdot \overbrace{(4.7 + 1 \cdot 0.07)}^{R_2} \Rightarrow L_1 = l_1 \cong 29.97$$

$$R_2$$
$$l_2 = 2 \cdot \pi \cdot \overbrace{(4.7 + 2 \cdot 0.07)}^{R_3} \Rightarrow L_2 = l_1 + l_2 \cong 60.38$$

$$R_3$$
$$L_3 = 2 \cdot \pi \cdot \overbrace{R_3}^{R_4} = 2 \cdot \pi \cdot (4.7 + 3 \cdot 0.07) \Rightarrow L_3 = l_1 + l_2 + l_3 = L_2 + l_3$$

...

En general tenim:

$$R_n = (4.7 + n \cdot 0.07) \quad L_n = 2 \cdot \pi \cdot (4.7 + n \cdot 0.07)$$
$$L_n = l_n + L_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \quad \text{amb } l_n = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot n \quad \text{i } L_1 = l_1$$

Ens aturarem quan trobem un n tal que $R_n = 10$ (usem el full de càlcul Excel)

n	Rn	ln	Ln
nº voltes	radi exterior	longitud volta nº	suma de longituds
1	4,77	29,97079392	29,97079392

2	4,84	30,41061689	60,38141081
3	4,91	30,85043986	91,23185067
4	4,98	31,29026283	122,5221135
5	5,05	31,73008581	154,2521993
6	5,12	32,16990878	186,4221081
7	5,19	32,60973175	219,0318398
8	5,26	33,04955472	252,0813946
9	5,33	33,48937769	285,5707722
10	5,4	33,92920066	319,4999729
11	5,47	34,36902363	353,8689965
12	5,54	34,80884661	388,6778432
13	5,61	35,24866958	423,9265127
14	5,68	35,68849255	459,6150053
15	5,75	36,12831552	495,7433208
16	5,82	36,56813849	532,3114593
17	5,89	37,00796146	569,3194208
18	5,96	37,44778444	606,7672052
19	6,03	37,88760741	644,6548126
20	6,1	38,32743038	682,982243
21	6,17	38,76725335	721,7494963
22	6,24	39,20707632	760,9565727
23	6,31	39,64689929	800,6034719
24	6,38	40,08672227	840,6901942
25	6,45	40,52654524	881,2167394
26	6,52	40,96636821	922,1831077
27	6,59	41,40619118	963,5892988
28	6,66	41,84601415	1005,435313
29	6,73	42,28583712	1047,72115
30	6,8	42,72566009	1090,44681
31	6,87	43,16548307	1133,612293
32	6,94	43,60530604	1177,217599
33	7,01	44,04512901	1221,262728
34	7,08	44,48495198	1265,74768
35	7,15	44,92477495	1310,672455
36	7,22	45,36459792	1356,037053
37	7,29	45,8044209	1401,841474
38	7,36	46,24424387	1448,085718
39	7,43	46,68406684	1494,769785
40	7,5	47,12388981	1541,893675
41	7,57	47,56371278	1589,457387
42	7,64	48,00353575	1637,460923
43	7,71	48,44335872	1685,904282
44	7,78	48,8831817	1734,787464
45	7,85	49,32300467	1784,110468
46	7,92	49,76282764	1833,873296
47	7,99	50,20265061	1884,075946
48	8,06	50,64247358	1934,71842
49	8,13	51,08229655	1985,800717
50	8,2	51,52211953	2037,322836
51	8,27	51,9619425	2089,284779
52	8,34	52,40176547	2141,686544
53	8,41	52,84158844	2194,528133

54	8,48	53,28141141	2247,809544
55	8,55	53,72123438	2301,530778
56	8,62	54,16105735	2355,691836
57	8,69	54,60088033	2410,292716
58	8,76	55,0407033	2465,333419
59	8,83	55,48052627	2520,813946
60	8,9	55,92034924	2576,734295
61	8,97	56,36017221	2633,094467
62	9,04	56,79999518	2689,894462
63	9,11	57,23981816	2747,13428
64	9,18	57,67964113	2804,813921
65	9,25	58,1194641	2862,933386
66	9,32	58,55928707	2921,492673
67	9,39	58,99911004	2980,491783
68	9,46	59,43893301	3039,930716
69	9,53	59,87875599	3099,809472
70	9,6	60,31857896	3160,128051
71	9,67	60,75840193	3220,886453
72	9,74	61,1982249	3282,084677
73	9,81	61,63804787	3343,722725
74	9,88	62,07787084	3405,800596
75	9,95	62,51769381	3468,31829
76	10,02	62,95751679	3531,275807

SUMA(A _n ;1)	SUMA(B _n ;0,07)	PRODUCTE(2;3,141592654;B _n)	SUMA(D _n ;C _n)
-------------------------	----------------------------	---	---------------------------------------

Obsevem que al cap de 76 voltes obtenim aproximadament 35 metres.