La Matemàtica com a mirall de la realitat

Modelització de funcions

Un vídeo

El llenguatge de les gràfiques

Vídeo emes per TV2 i realitzats per Antonio Pérez.

Una ullada a nivell internacional……….

The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications

http://www.ictma.net/conferences.html

ICTMA-1	1983	University of Exeter, England
ICTMA-2	1985	University of Exeter, England
ICTMA-3	1987	University of Kassel, Germany
ICTMA-4	1989	University of Roskilde, Denmark
ICTMA-5	1991	Fruedenthal Institute, Netherlands
ICTMA-6	1993	University of Delaware, USA
ICTMA-7	1995	University of Ulster, Northern Ireland
ICTMA-8	1997	University of Queensland, Australia
ICTMA-9	1999	University of Lisbon, Portugal
ICTMA-10	2001	Tsinghua University, Beijing, China
ICTMA-11	2003	Marquette University, Milwaukee, USA
ICTMA-12	2005	City University, London, UK
ICTMA-13 Satellite Meeting	2007 2007	Indiana University, USA Kathmandu University, Nepal
ICTMA-14	2009	University of Hamburg, Germany (The conference homepage at Hamburg University)
ICTMA-15	2011	University of Melbourne and Australian Catholic University (Melbourne), Australia
ICTMA-16	2013	Universidade Regional De Blumenau, SC, Brazil

Resums ICTMA-14

Decret 142/2007 DOGC núm. 4915

Decret 142/2007 DOGC núm. 4915
La competència matemàtica implica l'habilitat per comprendre, utilitzar i relacionar els números, les seves operacions bàsiques, els símbols i les formes d'expressió i raonament matemàtic, tant per produir i interpretar distints tipus d'informació, com per ampliar el coneixement sobre aspectes quantitatius i espacials de la realitat, i per entendre i resoldre problemes i situacions relacionats amb la vida quotidiana i el coneixement científic i el món laboral i social.
És a dir, la competència matemàtica implica el coneixement i maneig dels elements matemàtics bàsics (distints tipus de números, mesures, símbols, elements geomètrics, etc.) en situacions reals o simulades de la vida quotidiana; elaborar la informació a través d'eines matemàtiques (mapes, gràfics...) per poder-la interpretar; posar en pràctica processos de raonament que condueixin a la solució de problemes o a l'obtenció de la informació.

Competéncies matemàtiques ESO

Modelització de funcions

Algunes referències

Modelització de funcions

http://msel.impa.upv.es/

Modelització de funcions

www.upc.edu/epsevg/modelitzacio

Modelització de funcions

Des de dissenyadors de currículums, associacions de professors, etc. té especial interés en l'ensenyament activitats de modelització, apunto diferents referents socials que coincideixen a destacar la importància d'ensenyar les matemàtiques aplicades a la vida real i fer veure les relacions entre les matemàtiques i la realitat (epistemologia); els estudis més rellevants son: l'Informe Cockroft (1982), programa PISA (OCDE, 2003), els Principios y Estándares para la Educación Matemática (SAEM Thales 2003).

A més a més els currículums de matemàtiques, que alguns països proposen des dels anys 80 en diferents àmbits educatius, inclouen la resolució de problemes, aplicacions i modelitzacions. Aquests països, principalment, són: el Regne Unit, Austràlia, Finlàndia, Dinamarca i Holanda. Les raons per a aquesta inclusió estan ben expressades a Blum i Niss (1991) i Burkhardt (2006).

En el cas de Catalunya, en el nou currículum aprovat el 26 de juny de 2007, s'estableix que a final dels tres primers cursos es farà un treball de síntesi que ha de servir perquè els alumnes mostrin com saben relacionar els aprenentatges fets amb la vida pràctica. A la introducció de l'àrea de matemàtiques es diu que s'han de **potenciar les capacitats de l'alumne per «modelitzar situacions de la vida real»**

(DOGC 4915, pàg. 21873 i 21927).

Per anar fent boca!!!!

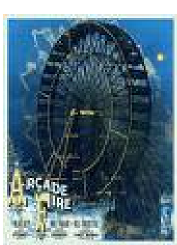
- Els angles d'un triangle sumen 180º? suma angles triangle.doc
- Un exemple de l'equació de segon grauExemple senzill del procés de modelització.equacio segon grau.doc
- Model sistema lineal 1model sistema lineal 1.doc
- Model sistema lineal 2model sistema lineal 2.doc
- El secretEl secret.doc
- Treballar models: Oferir el model fet per enriquir l'aprenentatge i mostrar aspectes epistemológics i la visualització de situacions. Per exemple en criptografia, càmeres de seguretat, tractament d'imatges,…
- Propiciar la resolució de problemes, laboratori de matemàtiques, implementar tallers, …..

Alguns problemes de modelització de funcions

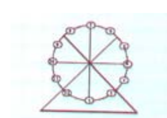
1. **Roda atracció de fira**
2. **Mes models exponencials**
3. **Catàstrofe ecológica**
4. **Optimitzar la longitud d'un terreny**
5. **El bulevard**
6. **Les crispetes**
7. **El mon dels envasos cilíndrics**

"La Matemática.Reflejo de la realidad" (Joan Gómez, 2007,FESPM)

Roda atracció de fira



Problema



Suposem una atracció de fira de l'estil que mostra la figura, l'anomenada roda o sínia (en castellà *nória*):

Suposarem diverses dades:

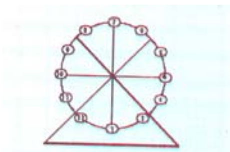
- 12 cadires igualment espaiades al llarg del seu perímetre, un radi de 10 metres i a una distància del punt més baix del terra de 0.5 metres; també suposarem que triga 30 segons en fer una volta completa i que la seva velocitat és constant.
- La idea és construir un model que permeti analitzar la següent qüestió:
- **Com varia la distància , respecte el terra, d'un passatger durant el passeig?**

Prenem com a model el gràfic anterior i notem que la cadira "1" està a 0.5 metres del terra. Per simplificar el problema suposarem que en l'instant t = 0, la posició està a la cadira "4"; és a dir: a 10.5 metres del terra.

Notem que si en 30 segons recorre una volta sencera (2π radians), aleshores en un temps de t segons recorrerà α radians, és a dir:

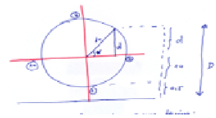
$\frac{30}{2\pi} = \frac{t}{\alpha}$ d'aquesta senzilla *regla de tres* s'obté que $\alpha = \frac{\pi}{15}t$; per tant en un segon recorre:

$\alpha = \frac{\pi}{15}$ radians, en dos segons $\alpha = 2\frac{\pi}{15}$ radians, i així successivament.



$10\sin(\alpha)$

Considerem la referència formada per les cadires "1" i "7" com eix d'ordenades i les cadires "10" i "4" com eix d'abscisses, a l'instant t=0 el passatger està a la posició "4" i al cap de α radians estarà a la posició d'ordenada $10\sin(\alpha)$ - per la definició de sinus d'un angle-, es a dir.



Al cap d'un determinat temps t la posició del passatger de la cadira "4" estarà a $d = 10\sin(t\frac{\pi}{15})$ i per tant la distància del passatges "4" al terra serà :

$$D = 10.5 + 10\sin(t\frac{\pi}{15})$$ metres.

Amb això podem fer una taula amb *Excel* discretitzant segon per segon tal com mostra la figura:

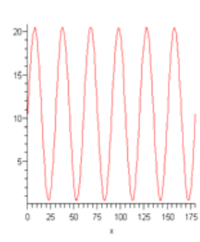
Nº de segons	Angle en radians	Distància del terra
0	0	10,5
1	0,20943951	12,5791169
2	0,41887902	14,5673664
3	0,62831853	16,3778525
4	0,83775804	17,9314483
5	1,04719755	19,160254
6	1,25663706	20,0105652
7	1,46607657	20,445219
8	1,67551608	20,445219
9	1,88495559	20,0105652
10	2,0943951	19,160254
11	2,30383461	17,9314483
12	2,51327412	16,3778525
13	2,72271363	14,5673664
14	2,93215314	12,5791169
15	3,14159265	10,5
16	3,35103216	8,42088309
17	3,56047167	6,43263357
18	3,76991118	4,62214748
19	3,97935069	3,06855175
20	4,1887902	1,83974596
21	4,39822972	0,98943484
22	4,60766923	0,55478105
23	4,81710874	0,55478105
24	5,02654825	0,98943484
25	5,23598776	1,83974596
26	5,44542727	3,06855175
27	5,65486678	4,62214748
28	5,86430629	6,43263357

Full de càlcul *Exel*

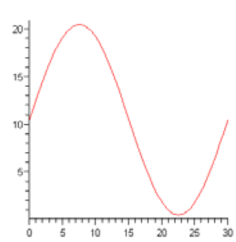
Full de càlcul colors

Si representem la gràfica D= 10.5+ 10 sin(PI*x/15), tenim:

$plot\left(10.5 + 10\cdot \sin\left(\pi\cdot \frac{x}{15}\right), x = 0..180\right);$



$plot\left(10.5 + 10\cdot \sin\left(\pi\cdot \frac{x}{15}\right), x = 0..30\right)$



$Y = ab^X$

MODELS EXPONENCIALS

$$Y = ab^X$$

Els doblecs d'un full de paper

- **Quantes vegades tenim que doblegar un full de paper per tal que, a l'augmentar el seu gruix, tinguem la distància de la Terra a la Lluna?**

Notes: gruix d'un full de paper = 0.1mm
Distància Terra – Lluna = 384.000km

Solució:

0.1mm = 0.0001m
384.000km = 384.000.000m

Al doblegar un cop el full, tinc que el gruix és: $0.0001 \cdot 2$
Al doblegar dos cops llavors tindrem: $(0.0001 \cdot 2) \cdot 2 = 0.0001 \cdot 2^2$
Al doblegar x cops, el gruix del paper és: $0.0001 \cdot 2^x$

El model serà l'equació exponencial :

$$0.0001 \cdot 2^x = 384.000.000$$

Per tant, per a calcular el número de cops que haurem de doblegar el full per calcular la distància de la Terra a la Lluna , resoldrem aquesta equació exponencial.

$$0.0001 \cdot 2^x = 384.000.000 \Rightarrow 2^x = 3.84 \cdot 10^{12} \Rightarrow x = 41.80424 \Rightarrow x = 42$$

Per tant, calen 42 doblecs del full

Malalties

Exemple1: En una enfermetat hi han tres persones contagiades inicialment. Cadascun d'aquests contagia a una altra persona cada setmana.

a) Calcular el nombre de persones malaltes al cap de 1, 2, ..., x setmanes.

b) Quant de temps ha passar per què hi hagin 6.144 persones amb la malaltia?

a) Calcular el nombre de persones malaltes al cap de 1, 2, ..., x setmanes.

Inicialment (setmana 0) hi ha tres persones contagiades: P_1, P_2, P_3.

SETMANA 0	SETMANA 1	SETMANA 2
P_1 →	contagia 1 →	contagia 1
→		contagia 1
P_2 →	contagia 1 →	contagia 1
→		contagia 1
P_3 →	contagia 1 →	contagia 1
→		contagia 1

Llavors, tindrem que:

Malalts:	3	6	12
	Setmana 0	Set. 0 + Set. 1	Set. 0 + Set. 1 + Set. 2
	$3 = 3\cdot 2^0$	$6 = 3\cdot 2^1$	$12 = 3\cdot 2^2$

Aquestes consideracions anteriors, aplicant-les per a la setmana x serà: $3\cdot 2^x$. Per tant, el nombre de malalts en x setmanes si el designem per y tindrem que **el model és la funció exponencial:**

$$y = 3\cdot 2^x$$

b) Quant de temps ha passar per què hi hagin 6.144 persones amb la malaltia?

Hem de resoldre:

$$3\cdot 2^x = 6144 \Rightarrow 2^x = \frac{6144}{3} = 2048 \Rightarrow 2^x = 2^{11} \Rightarrow x = 11$$

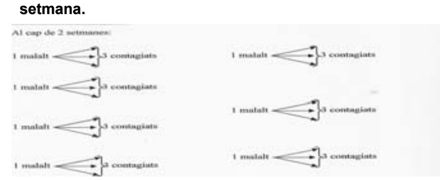
Per tant, **al cap d'11 setmanes hi hauran 6144 contagiats**.

Exemple2:

Considerem en una enfermetat que cada persona contagia a unes altres 3 persones al cap de 2 setmanes, però no torna a contagiar més l'enfermetat. Inicialment hi havien 7 persones contagiades.

a) **Calcular el nombre de persones que s'han contagiat a la 8a setmana.**
b) **Calcular el número total de persones contagiades en aquestes 8 setmanes.**
c) **Quin és el número de persones que es van contagiar a la setmana x? I el nombre de persones total en aquestes x setmanes?**
d) **Quantes setmanes han de passar per tal que la darrera setmana hi hagin 137.781 malalts?**
e) **Quin número de setmanes han de passar fins que es trobin un total de 22.960 persones malaltes?**

a) Calcular el nombre de persones que s'han contagiat a la 8a setmana.



És a dir, que al cap de 2 setmanes hi haurà:

$$7\cdot 3 = 21$$

2 setmanes següents, el nombre de malalts serà de:

$$(7\cdot 3)\cdot 3 = 7\cdot 3^2$$

Fent les mateixes operacions, calcularem el nombre de malalts que seran a la 8a setmana:

$$(7\cdot 3)\cdot 3^3 = 567 \text{ malalts}$$

b) Calcular el número total de persones contagiades en aquestes 8 setmanes.

Es pot dir que, en general, l'operació a seguir és:

2a set.	4a set.	6a set.	8a set.	x set.
$7 \cdot 3^1$	$7 \cdot 3^2$	$7 \cdot 3^3$	$7 \cdot 3^4$	$7 \cdot 3^{x/2}$

Operant, calculem el nombre total de malalts en 8 setmanes:

$$7 \cdot 3^1 + 7 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^4 = 847 \text{ malalts}$$

Modelització de funcions

c)Quin és el número de persones que es van contagiar a la setmana x? I el nombre de persones total en aquestes x setmanes?

A la setmana x es contagien $7 \cdot 3^{x/2}$ malalts.

Per a calcular el número total de persones malaltes en x setmanes haurem de recórrer a la fórmula de la progressió geomètrica multiplicada per un terme z independent:

$$S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

Aplicant aquesta fórmula, tindrem que:

$$7 \cdot 3^0 + 7 \cdot 3^1 + 7 \cdot 3^2 + \ldots + 7 \cdot 3^{x/2} = 7 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{x/2}) = 7 \cdot S_n \Rightarrow \quad \textit{aplicant la fórmula} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7 \cdot \frac{3^0 \cdot (3^{(x/2)+1} - 1)}{3 - 1} = \frac{7 \cdot (3^{(x/2)+1} - 1)}{2} = \frac{7 \cdot 3^{(x/2)+1} - 7}{2}$$

Tenim doncs, que **el model és la suma d'una progressió geomètrica,**, el nombre total "S" de persones contagiades en "x" setmanes vindrà donat per l'expressió:

$$S = \frac{7 \cdot 3^{(x/2)+1} - 7}{2}$$

Modelització de funcions

d) Quantes setmanes han de passar per tal que la darrera setmana hi hagin 137.781 malalts? e) Quin número de setmanes han de passar fins que es trobin un total de 22.960 persones malaltes?

d)

Per a saber les setmanes que han de passar, hem de resoldre:

$$137.781 = 7 \cdot 3^{x/2} \Rightarrow \frac{137.781}{7} = 3^{x/2} \Rightarrow 19.683 = 3^{x/2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3^9 = 3^{x/2} \Rightarrow \frac{x}{2} = 9 \Rightarrow x = 18$$

e)

Si volem saber el número de setmanes que han de passar fins que es trobin un total de 22.960 persones malaltes l'expressió:

$$22.960 = \frac{7 \cdot 3^{(x/2)+1} - 7}{2} \Rightarrow 6561 = 3^{(x/2)+1} \Rightarrow 3^8 = 3^{(x/2)+1} \Rightarrow 8 = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow x = 14 \,,$$

Per tant, hauran de passar 14 setmanes

Document sencer

Modelització de funcions

Catàstrofe ecològica

Contínuament llegim als diaris sobre vaixells que tenen accidents en el mar i provoquen la mort de milers de peixos, aus i altres espècies d'animals. Una noticia com la següent feia sorgir un dubte, serà gaire car netejar el mar dels contaminants que s'han abocat?.

Modelització de funcions

Un vaixell que transportava 3 000 m3 de petroli, producte altament contaminant, s'enfonsa originant una taca de forma circular, amb el punt de l'enfonsament com a centre. Aquesta taca s'estén mantenint aquesta forma geomètrica i amb un espesor uniforme en tota la superfície, el valor de la qual en metres, t hores després de l'enfonsament, ve donada per la funció h (t) :

h (t) = [α.2 -(t/β)] 2 (1)

Greenpeace acudeix al lloc de l'accident i aconsegueix, 15 hores després de l'enfonsament, acordonar la taca pel seu perímetre amb una barrera d'un producte que anula la seva propagació i l'elimina progressivament.
Supposant que és necessari utilitzar 0,5 m3/m (m3 per metre de longitud del perímetre de la taca) d'aquest producte i que el preu del mateix és 10 000 euros/m3 i que tot el petroli del vaixell ha anat a parar al mar.
Tenint en conte que: $\alpha = \sqrt{2}$ I β = 5 hores

Quant costarà, econòmicament, netejar la taca de petroli?.

Modelització de funcions

Dades:

V = 3 000 m3.
$\alpha = \sqrt{2}$ m.
β = 5 hores.
γ = 0,5 m3/m.
P = 10 000 euros/m3.
t* = 15 hores.

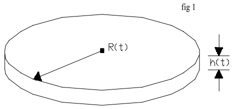
Model gràfic i plantejament :

Modelització de funcions

Seguidament i d'acord amb l'enunciat, la taca té, a cada instant t, la forma d'un cilindre de radi R(t) i alçada h(t) com es pot veure a la figura 1 i que representa el model gràfic de la situació.

fig 1

A mesura que transcorre el temps i la taca s'estén, disminueix el seu gruix i augmenta el seu radi, però sempre conté el mateix volum V de petroli.



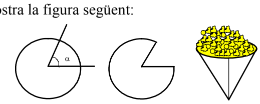
Per tant, a cada instant t s'ha de verificar que:

$$V = \pi R^2(t) h(t) \qquad (2)$$

Modelització de funcions

Les crispetes

Encara existeixen moltes sales de cinema on es permet (incentivat en molts casos) menjar bombons, xocolates, ... i crispetes ! Les paperines que el venedors utilitzen per contenir les crispetes són generalment de paper, però els formats solen variar bastant.
Una determinada fàbrica de paperines opta per fabricar-les a partir d'un cercle de paper amb un determinat radi R, tallant una secció corresponent a un cert angle α i amb la secció sobrant fabrica un con unit per les dues extremitats retallades. Tal com mostra la figura següent:



Quin és l'angle α que permet construir la paperina on hi càpiga el major volum de crispetes?

$Y = ab^x$

Modelització de funcions

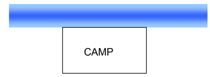
Optimitzar la longitud d'un terreny

Un poliesportiu a la vorera d'un riu

Modelització de funcions

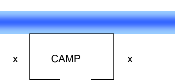
EL POLIESPORTIU

Volem construir un camp rectangular de ubicat a la vorera d'un riu:



No volem posar cap tanca de limitació amb el riu. Quines dimensions ha de tenir el camp per tal de que s'utilitzi el mínim de la valla possible i quina serà la mesura de la valla?

Modelització de funcions



Volem que la longitud sigui mínima:

$$L = 2x + y$$

Sabem que $x \cdot y = 3200$

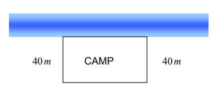
Notem que n'hi x n'hi y poden prendre valors negatius, del fet $x \cdot y = 3200$ tenim que $y = \frac{3200}{x}$

Aleshores:
$L = 2x + y = 2x + \frac{3200}{x}$ amb $x > 0$ cal trobar el mínim valor de L

Modelització de funcions

Raonament clàssic

Derivem L i tenim $L' = 2 - 3200 \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 40$ com que x ha de fer positiu, prenem el valor $x = 40$ per tant $y = \frac{3200}{40} = 80$ i en tal cas la longitud serà $L = 2 \cdot 40 + \frac{3200}{40} = 160\,m.$
La situació lineal serà:



Modelització de funcions

Raonament per "assaig"

Representem el gràfic $L(x)=2x+\frac{3200}{x}$ per $x>0$ i ens fixem quin x ens proporciona la longitud mínima.

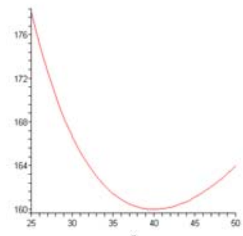
x	y	L	x·y
10	320	340	3200
15	213,333333	243,333333	3200
20	160	200	3200
25	128	178	3200
30	106,666667	166,666667	3200
35	91,4285714	161,428571	3200
40	80	160	3200
45	71,1111111	161,111111	3200
50	64	164	3200
55	58,1818182	168,181818	3200
60	53,3333333	173,333333	3200
65	49,2307692	179,230769	3200
70	45,7142857	185,714286	3200

Modelització de funcions

Raonament gràfic

```
plot(2*x+(3200/x),x=25..50);
```

Longitu

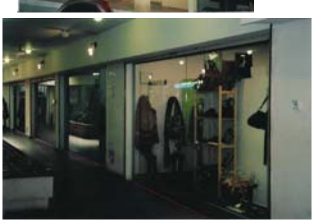


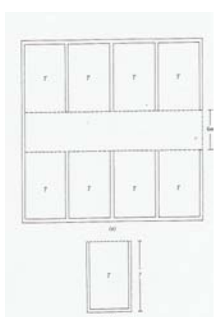
Valors de x

Document sencer

Modelització de funcions

Construcció d'un petit centre comercial



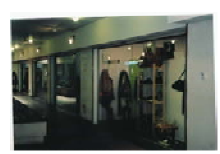


Modelització de funcions

SITUACIÓ I OBJECTIU

L'objectiu d'aquest treball és construir un centre comercial per tal de calcular el mínim cost que suposa la seva construcció. El treball està inspirat en la construcció de les galeries comercials "Roxy" de Vilanova i la Geltrú.

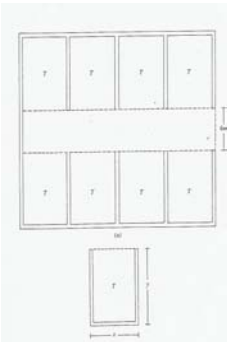
Imatge de l'entrada



Imatge del passadís interior amb quatre botigues

El petit centre comercial consta de vuit botigues amb un passadís central. El seu plànol es troba representat a continuació:

Modelització de funcions

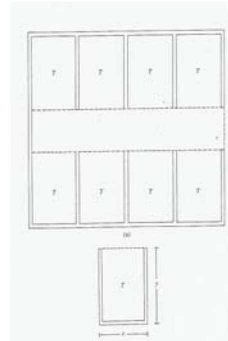


El centre comercial consta de vuit botigues rectangulars iguals (marcades amb una T en el plànol). Cada un dels establiments té 150 m2 de superfície. El passadís central, juntament amb l'entrada principal han de tenir 6 m d'ample.
Cal dir, que les línies puntejades que apareixen en el plànol representen divisions fetes de vidre.
Es vol determinar les dimensions exteriors que ha de tenir aquest centre perquè el seu cost de construcció sigui el menor possible.

Com a dades addicionals es coneix que la construcció de paret costa 40 euros el metre lineal i les divisions de vidre tenen un cost de 100 euros per metre lineal.

Modelització de funcions

Metres de vidre: 8x + 6
L'enunciat de la situació ens diu que el cost del vidre és de 100 euros per metre, per tant contarem l'espai del centre que és de vidre i el multipliquem per 100. I queda:
100·(8x+6) ; on el 8 representa el nombre de botigues del centre i 6 els metres corresponents a l'entrada principal.
A continuació, seguint el plànol del centre comercial, es mira l'espai de paret que hi ha i es multiplica per 40 euros. Queda una expressió del tipus:
2y+6 + 4x + 2y + 4x +6y = 10y + 8x+ 6 → 40(10y + 8x+ 6) on:
2y+6 → correspon a l'espai de la part del darrere del centre
4x → correspon als dos laterals, en els que cada un té 4 botigues.
2y → corresponent a la paret de la part del davant
I per últim, cal també tenir en compte l'espai de les divisions entre els establiments del centre, que seria 6y.
El cost total de la construcció seria doncs:
C(x,y)=100 (8x + 6) + 40 (10y+8x+6) **,**
on x· y = 150 m2 (de superfície de cada botiga.)



Modelització de funcions

Assaig

x	y	xy	CT
1	150	150	61960
1.5	100	150	42520
2	75	150	33080
2.5	60	150	27640
3	50	150	24200
3.5	42.85	150	21902.85
4	37.5	150	20320
4.5	33.3	150	19213.3
5	30	150	18440
5.5	27.27	150	17909.09
6	25	150	17560
6.5	23.07	150	17350.76
7	21.42	150	17251.42
7.5	20	150	17240
8	18.75	150	17300
8.5	17.64	150	17418
9	16.67	150	17586.6
9.5	15.79	150	17795.6
10	15	150	18040
10.5	14.28	150	18314
11	13.63	150	18614.5

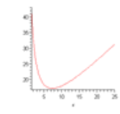
Notem que el valor mínim està "a ull" pels valors d'x compresos entre 7 i 7.5

Modelització de funcions

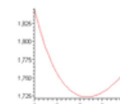
Visualització gràfica

Fent y = 150/x l'equació queda de la següent manera:
CT = 100 (8x + 6)+ 40 (1500 · 1/x + 8x + 6)

***Plot*(100 (8x + 6)+ 40 (1500 · 1/x + 8x + 6),x=1.5..25);**



***Plot*(100 (8x + 6)+ 40 (1500 · 1/x + 8x + 6),x=5..9);**



Usant derivades

Procedirem usant derivades:
Teníem que CT= 100 (8x + 6)+ 40 (1500 · 1/x + 8x + 6);
Aleshores:
(CT)´ = 100 (8) + 40 (1500 (-1/X2) + 8) = 0
Si igualem a zero la derivada trobarem el punt mínim de la funció:
X = 7.32 metres
La “y” serà per tant:
y = 150/x =150/ 7.32 = **20.5 metres**
Per aquests valors **el cost total és: 17235.12131 euros**

Document sencer

Modelització de funcions

El mon dels envasos: Optimitzar superfícies de cilindres

Modelització de funcions

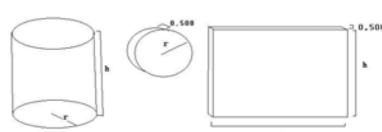
Es tracta de trobar les dimensions per a fabricar llaunes per emmagatzemar una quantitat d’uns 33 cl de beguda, estalviant el màxim d’alumini possible

L’empresa Coca-cola te diversos tipus d’envàs,entre ells, el clàssic i el més actual de forma més allargada.

Modelització de funcions

Envás clàssic

El volum és de 33cl es a dir: .Suposem que la base i la tapadora del recipient es plana. Suposarem també que sigui un cilindri perfecte i ignorem el ganxo per obrir la llauna. Experimentalment s’ha trobat que el gruix lateral de la llauna es de 0,508mm. I que la quantitat d’alumini de la tapa es el triple que el de les parets tal com mostra la figura:



La quantitat d'alumini serà igual a la quantitat d'alumini en la base, mes la quantitat al lateral i mes la tapa (3 vegades la base).
Es a dir, la funció a optimitzar (minimitzar) serà:

$$Q.Al = 4 \cdot 0{,}508 \cdot \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h \cdot 0{,}508$$

El primer terme de l'expressió és la quantitat d'alumini que hi ha entre la base i la tapa, recordem que la tapa te tres vegades la quantitat d'alumini de la base.
El segon terme es la quantitat d'alumini que te el lateral de la llauna.

Treien factor comú, l'expressió queda: $Q.Al = 0{,}508\pi \cdot (4 \cdot r^2 + 2 \cdot r \cdot h)$

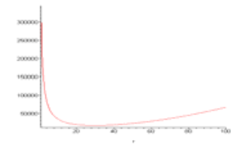
Lligam: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow 333.333{,}\hat{3} = \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow h = \dfrac{333.333{,}\hat{3}}{\pi \cdot r^2}$

Substituint a l'expressió anterior queda:

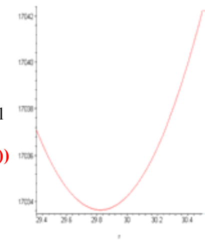
$$Q.Al = 0{,}508 \cdot \pi \cdot \left(4 \cdot r^2 + \frac{2 \cdot 333.333{,}\hat{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{r}\right)$$

Visualment observem que el mínim està a l'entorn del 29.8

plot(0.508*Pi*(4*r^2+(2*333333.3/Pi)*(1/r)),r=1..100);



Si ens aproximem gràficament als voltants del 29,8 tenim:
plot(0.508*Pi*(4*r^2+(2*333333.3/Pi)*(1/r)) ,r=29.4..30.5);



Si usem derivades, tenim:

$$Q.al' = 0{,}508 \cdot \pi \cdot \left(8 \cdot r - \frac{2 \cdot 333.333{,}\hat{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2}\right)$$

Igualant a zero i aïllant el radi s'obté: **r=2,98cm** i per tant l'alçada és:

$$h = \frac{333.333{,}\hat{3}}{\pi \cdot r^2} = 11{,}925\text{cm}$$

L'altura i el radi que ens proporciona el fabricant de l'envàs clàssic de coca-cola és:
h =11,5cm i r = 2,7cm.
Per tant podem afirmar que l'empresa coca-cola ha utilitzat optimització per estalviar-se material en la construcció de les llaunes.

L'envàs nou de Coca-Cola

Experimentalment es comprova que en el nou envàs de Coca-Cola, la tapa és quatre vegades el gruix de les parets, si anomeno g al gruix de les parets tenim que la quantitat d'alumini de la tapa és $4g\pi r^2$

Es tracta de trobar les dimensions del nou envàs que minimitzen la quantitat d'alumini.

Quantitat Alumini

Tenim les dades:

Q = Quantitat d'alumini= Quantitat en la tapa+quantitat en la base +quantitat en les parets =
$4\pi r^2 g + \pi r^2 g + 2\pi rhg = g(5\pi r^2 + 2\pi rh) = g\pi(5r + 2\pi h)$

Com a lligam tenim :

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{333333\ ,\hat{3}}{\pi r^2}$$

Si ho substituïm a Q s'obté:

$$Q = g\pi(5r^2 + 2r\frac{333333\ ,\hat{3}}{\pi r^2}) = g\pi(5r^2 + \frac{666666\ .\hat{6}}{r\pi})$$

Si derivem tenim:

$$Q` = g\pi(10r - \frac{666666.\hat{6}}{r^2\pi})$$

Igualant a zero la primera derivada s'obté:

$$10r - \frac{666666.\hat{6}}{r^2\pi} = 0$$

I per tant el radi queda com:

$r = \sqrt[3]{\frac{666666,\hat{6}}{10\pi}} = 27.68553728 \ mm$ i per tant un diàmetre de 55,37107456 mm

I l'alçada:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{333333,\hat{3}}{\pi(27.68553728)^2} = 138.427864 \ mm$$

Modelització de funcions

Exemples de treball en modelització

Tesi Montero

Tesi Manel Sol tesi manel sol.pdf

Propostes per ESO

Modelització de funcions

Verifiquem i comparem les dades obtingudes amb les dimensions de l'envàs real

Alçada llauna real: 143 mm= **14.3 cm**

Alçada llauna usant optimització: 138 mm =**13.8 cm**

Radi llauna real: 27 mm= **2.7 cm**

Radi llauna usant optimització: 28 mm= **2.8 cm**

Conclusions

Després de realitzar el càlcul d'optimització i comparar els resultats obtinguts amb els resultats reals de les dimensions del nou envàs, podem afirmar que la firma Coca-Cola ha actuat de manera coherent amb els resultats matemàtics.

Accés a tot el document

Modelització de funcions

Un vídeo de cloenda

Les cóniques com a models de la realitat

Vídeo emes per TV2 i realitzats per Antonio Pérez.

Treball en grup fet per un estudiant