

Modelització Matemàtica com eina d'ensenyament




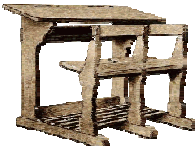
Introducció a la modelització

Fonaments

Joan Gómez i Urgellés
UPF. Curs 2009-2010

Modelització Matemàtica com eina d'ensenyament



Reptes del passat, present i futur en el noble l'ofici d'ensenyar matemàtiques


Matemàtiques i societat: Una història d'amor.....

Modelització Matemàtica com eina d'ensenyament

La seducció matemàtica ?


Perquè no agraden les matemàtiques?



Modelització Matemàtica com eina d'ensenyament

Una reflexió

Què és "Fer matemàtiques"?



«La matemàtica ha constituïdo, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces». (Puig Adam, 1958)

La realitat educativa

- 1.- Parlar ràpid en les explicacions més rellevants i estendre's en els detalls menys significatius. Això evita preguntes i diàleg entre professor i alumnes.
- 2.- Escriure abundantment a la pissarra de forma ràpida i il·legible, i si a més s'utilitzen diferents parts de la pissarra simultàniament l'èxit del desastre està assegurat, s'obté un clima de tensió i ignorància per part dels estudiants.
- 3.- Seguir punt per punt el contingut del llibre de text, sigui aquest important o no.
- 4.- Procurar que les dades dels problemes siguin fictícies per eliminar qualsevol semblança amb la realitat. S'evitaran els jocs, les visites i les pràctiques de laboratori,....ha de quedar clar que l'assignatura és seria!
- 5.- L'exemple més típic és la resolució mecànica dels problemes amb carros de fórmules, una darrera de l'altra, que no se saben d'on surten.

- 6.- Els exàmens són durs i no tenen res a veure amb la matèria donada a classe, ni amb la realitat. S'entén per avaluació continua examen continu.
- 7.- Donar avisos, en veu alta, cada cinc minuts sobre el temps que falta per cloure l'examen és una forma de desconcertar a l'alumnat i de desanimar-lo. Sembla mentida però els professors pensen que fan un favor als alumnes.
- 8.- Fent una avaluació dura pensant que això donarà prestigi a l'assignatura i al professor que la imparteix, és uns dels errors més comuns que s'acostumen a fer. Els alumnes pensaran que aquesta és una d'aquelles assignatures en la que s'ha d'empollar i fer xuletetes.
- 9.- Escrivint tant com hi càpiga a la pissarra i fent servir un to de veu monòton per les explicacions, s'aconseguirà que una epidèmia badalls envaeixi la classe.
10. Adquirir conductes i patrons dels seus predecessors quan ells eren estudiants

ANÀLISIS DE LA SITUACIÓ: *Metàfora del nadador*

“Imagínes una escuela de natación que se dedicara un año a enseñar anatomía y fisiología de la natación, psicología del nadador, química del agua y formación de los océanos, costes unitarios de las piscinas por usuarios, sociología de la natación, antropología de la natación y, desde luego, la historia mundial de la natación ,desde los egipcios hasta nuestros días. Todo esto, evidentemente, a base de cursos magistrales, libros y pizarras, pero sin agua. En una segunda etapa se llevaría a los alumnos-nadadores a observar durante varios meses a nadadores experimentados; y después de esta sólida preparación, se les lanzaría al mar, en aguas bien profundas, en un día de temporal invernal ”

(Busquet, J. ¿Pueden fabricarse profesoras? En J. Busquet, (ed.): *La problemática de las reformas educativas*. INCIE, Madrid, 1974, p. 50)



1. Manca d'aplicacions en els currículums de matemàtiques.

“L'absència d'aplicacions ens fa incapaços d'inspirar amor a aquesta ciència” (Rey Pastor, 1955 i citat en Lusa, 1982)

2. Excés de formalisme (influència bourbakista) en les presentacions.

“Cal desenvolupar la intuïció per tal de que l'enginyer aprengui les relacions entre el món real i l'abstracció de les ciències” (J. Perry, citat en Lusa, 1992)

*“En l'ensenyament de les matemàtiques cal substituir el formalisme pel pensament intuïtiu i les matemàtiques han d'estar en contacte amb situacions de la realitat (Puig Adam, *Calcul integral*, 17^{ena} edició 1979)”*

3. Insatisfacció en l'ensenyament tradicional i poca motivació.

Modelització Matemàtica com eina d'ensenyament

Una mirada: Alguns personatges

Dibutnant a un seminari Bourbaki

Modelització Matemàtica com eina d'ensenyament

Una mirada al currículum dels usuaris de la matemàtica. Continguts freqüents

1. Temaris d'enginyeria, economia, biologia, ... (Epistemologia?).
2. Problemes i exercicis (calculadores?, aplicacions?)
3. Avaluació: Exàmens individual, sense apunts
4. Bibliografia: llibres per aprendre matemàtiques *versus* llibres de matemàtiques

On són les diferències rellevants comparant especialitats?

Modelització Matemàtica com eina d'ensenyament

Una ullada a alguns llibres universitaris

Modelització Matemàtica com eina d'ensenyament

Potser una involució seria més positiva

CITES

- “ Uno de los defectos fundamentales que tenía la enseñanza matemática, para técnicos en los comienzos del siglo era su exceso de abstracción, su inconsciente apartamiento de toda aplicación inmediata al mundo real. Ello motivó , como es sabido, una intensa reacción antimatemática en las escuelas técnicas, que quedó rápidamente frenada en cuanto los mismos técnicos se dieron cuenta de que la culpa de su incapacidad no radicaba en la matemática en sí , sino en el modo cómo se las había enseñado” El cómodo pretexto: “Ustedes verán cómo esto se aplica en....” rara vez tenía confirmación. (P. Puig Adam, Cálculo integral, 1972)

Un petit apunt

Joan Triadú (Revista bieç, n.27, 2002): *"Els professors, haurien de tenir una preparació didàctica o pedagògica expressa per a l'ensenyament que efectuen. Hi ha molta gent que fa carreres sense la intenció d'ensenyar-les després i es troben a l'ensenyament per qüestions laborals. No s'hi senten bé ni estan preparats per a fer-ho. L'ensenyament vol una predisposició personal i s'ha de reforçar amb una predisposició pedagògica que moltes vegades no hi és"*

En graïment al record



En graïment al record



En homenatge als nostres mestres en el noble ofici d'educar, d'ells hem sigut aprenents i encara ens manca molt per aplicar de les seves lliçons....Gràcies Maria Montessori, Alexandre Gali, Rosa Sensat, Ferrer Guàrdia, Josep Pallach, Marta Mata,...



I especialment del nostre ofici:

Gràcies Santaló, Abrantes, Puig, Guzmán, Terrades, Pòlya, Roig,... i molts d'altres.....



Gràcies per la vostra herència acadèmica i humana.

Decàleg de la didàctica de les matemàtiques, Pere Puig Adam (1955)

1. No adoptar una didàctica rígida, sinó adaptada a cada alumne, observant-lo constantment.
2. No oblidar l'origen concret de la Matemàtica ni els processos històrics de la seva evolució.
3. Presentarem la Matemàtica com una unitat relacionant-la amb la vida natural i social.
4. Graduarem amb cura els plans d'abstracció.
5. Ensenyarem tot guiant l'activitat creadora i descobridora de l'alumne.
6. Estimularem aquesta activitat esperant l'interès directe i funcional cap a l'objecte del coneixement.
7. Promourem l'autocorrecció tan com sigui possible.
8. Aconseguirem una certa destresa en les solucions abans d'automatitzar-les.
9. Procurarem que l'expressió de l'alumne sigui una expressió fidel del seu pensament.
10. Procurarem a cada alumne èxits que evitin la seva desmoralització



Interpretació Decàleg

El Decàleg del Professor per G. Pòlya

1. *Interessa't per la teva matèria.*
2. *Coneix la teva matèria.*
3. *Coneix les maneres d'aprendre.*
4. *Tracta de llegir en les cares dels estudiants, tracta de veure les seves expectatives i les seves dificultats, posa't en el seu lloc.*
5. *No donis als estudiants només informació, sinó maneres de desembolicar, actituds mentals, l'hàbit del treball metòdic.*
6. *Deixa'ls aprendre a conjecturar.*
7. *Deixa'ls aprendre a demostrar.*
8. *Busca aquells traços del problema que s'estigui tractant que puguin ser útils per a resoldre els problemes que es presenten en el futur. Tracta de desvelar el patró general que amaga la present situació concreta.*
9. *No desvelis tot el teu secret d'una vegada; deixa que els estudiants facin conjectures abans que tu diguis la solució; deixa'ls esbrinar per si mateixos tant com sigui possible. (Com deia Voltaire: "L'art de ser avorrit consisteix a dir-ho tot")*
10. *Suggereix-lo, no l'espantis perquè se li farà més difícil.*

Innovació



És aquell procés que marca un abans i un després en una situació o metodologia i provoca uns canvis positius de millora de la situació o metodologia.



Missatge: Què és “Fer matemàtiques”?

El missatge a transmetre és que *les matemàtiques poden ser útils i atractives*. Matemàtiques és sentiment. Fer matemàtiques no és realitzar un seguit de rutines, ni fer més temes, és en tot cas oferir més idees i més creativitat; fer matemàtiques és una manera de pensar i de viure; fer matemàtiques és una manera de mirar el món que ens envolta, fer matemàtiques es pensar abans d'actuar, ensenyar matemàtiques forma part de l'educació i formació de ciutadans i ciutadanes destacant la component humana de les matemàtiques i despertant l'esperit crític tot fomentant el debat i el treball en grup. El llenguatge matemàtic no ha de ser el punt de partida, sinó el punt d'arribada.

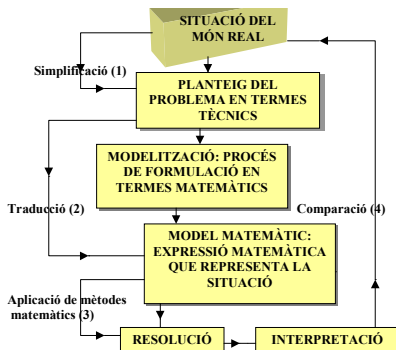
“Les matemàtiques es fan amb el cap i s'ensenyen amb el cor” (C. Alsina, Diari Avui, 1999)

Modelització matemàtica

“La modelització matemàtica és l'art d'aplicar les matemàtiques a la vida real”

M. Niss

Esquema del procés de modelització



- Assumim per **matematització** la transformació mental en termes matemàtics de situacions de la realitat com a fase prèvia a la modelització. (De Lange ,1987)
- Assumim per **modelització** l'art d'aplicar les matemàtiques a situacions de la vida real (M. Niss, 1989)
- Entendrem per **model** la terna (A, M, f) on A representa una situació de la realitat, M un conjunt d'objectes i expressions matemàtiques i f una correspondència entre A i M .

Objectiu:

Implementar les tècniques del modelatge matemàtic, com eina d'aprenentatge, i alhora demostrar la seva viabilitat.

Com? Amb les anomenades unitats didàctiques i projectes.

Questionari



Nom _____
 Tema _____
 Data inici _____ Data final _____

1. Quins creus que són els punts més important del tema?
2. Creus que tenen alguna utilitat?
3. Detalla els aspectes que han quedat clars i els foscos.
4. Pel que fa a l'ensenyament tradicional, creus que la forma d'exposar el tema té alguna diferència amb l'ensenyament tradicional?
5. Creus que el què has après te utilitat en la teva carrera, o fins i tot en la teva futura vida professional?

Fitxa personal de l'alumne/a

Nom: _____			
Procedència: Batsillerat <input type="checkbox"/>		Cicle <input type="checkbox"/>	Altres <input type="checkbox"/>
Conèxims previs:			
Tema 1	SUFICIENTS <input type="checkbox"/>	POCS <input type="checkbox"/>	CAT <input type="checkbox"/>
Tema 2	SUFICIENTS <input type="checkbox"/>	POCS <input type="checkbox"/>	CAT <input type="checkbox"/>
Tema 3	SUFICIENTS <input type="checkbox"/>	POCS <input type="checkbox"/>	CAT <input type="checkbox"/>
Pràctica Tema 1			
Dificultats trobades: _____			
Suggeriments/aportacions: _____			
Què ha après: _____			
Pràctica tema 2			
Dificultats trobades: _____			
Suggeriments/aportacions: _____			
Què ha après: _____			
Projecte			
Dificultats trobades: _____			
Suggeriments/aportacions: _____			
Què ha après: _____			

Sobre el disseny de les unitats didàctiques

Activitats dirigides on l'estudiant construeix de manera individual i a classe el model de la situació i treballa sobre el model.



Hi ha un paral·lisme entre la llei de Ohm i la llei de Hooke, les dues són expressions del tipus:

$$A = B \cdot C \quad \text{en el cas que} \quad \begin{cases} A = V & C = I \Rightarrow \text{Ley de Ohm} \\ A = F & C = x \Rightarrow \text{Ley de Hooke} \end{cases}$$

Guaita els dos esquemes: Observa el següent circuit:



Si plantegem les equacions:

$$V = (R_1 + R_2) \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2$$

$$0 = -R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_1 + R_2) \cdot I_2$$

matricialment:

$$\begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_1 + R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$



Plantegem les equacions:

$$f_1 = -K_1 \cdot x_1 + K_{12} \cdot (x_2 - x_1)$$

$$f_2 = -K_{12} \cdot (x_2 - x_1) - K_2 \cdot x_2$$

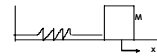
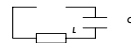
matricialment:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(K_1 + K_{12}) & K_{12} \\ K_{12} & -(K_{12} + K_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Situacions plasmades en la unitat

L'equació que descriu la càrrega que és amagatzemada en les plaques d'un condensador de capacitat C quan el connectem en sèrie amb una resistència R i una bobina de coeficient d'autinducció L és:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$



Oscil·lador mecànic	x	Circuit LC	Q
Posició	x	Càrrega condensador	Q
Massa	M	Autinducció bobina	L
Factor d'amortiment	\(\delta\)	Resistència	R
Cap. Recuperadora	x	Invers de la capacitat	1/C

En general, resolen una equació del tipus:

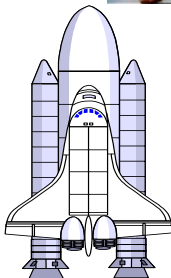
$$y'' + a y' + \beta y = 0 \quad \text{com a model com partitl.}$$

PRESENTACIÓ DE LA UNITAT DIDÀCTICA DE DERIVACIÓ



ACTIVITAT 0. INTRODUCCIÓ.

Miguel López Alegria ha estat el primer astronauta espanyol que ha viatjat a l'espai. Dintre del transbordador espacial "Columbia" va ser 16 dies donant voltes al nostre planeta (una cada 90 minuts) en una òrbita fora de l'atmosfera de la Terra. La N.A.S.A. (National Aeronautics and Space Administration) va ser fundada el 1958 i només 11 anys després va assolir amb èxit el seu primer objectiu: el 21 de Juliol del 1969, d'acord amb la data prevista per Kennedy, els astronautes Armstrong i Aldrin, tripulants del mòdul lunar de l' "Apolo 11", van aconseguir alitzar i retornar sans i estalvis a la Terra. Però els darrers objectius de la N.A.S.A han estat situar a l'espai nombrosos satèl·lits artificials (principalment de comunicacions) i realitzar certs experiments, fer servir el Columbia. El treball a realitzar per Miguel López Alegria, a més del pilotatge, va consistir en l'estudi del moviment dels cosos en condicions de gravetat i densitat atmosfèrica diferents a les existents a la Terra. És indispensable, però, preveure els resultats d'aquests experiments per no córrer riscos innecessaris. Les condicions de diferent gravetat i densitat atmosfèrica es poden modelitzar matemàticament, i així obtenir uns resultats previs, òptims, als experiments que posteriorment portaran a terme els astronautes.

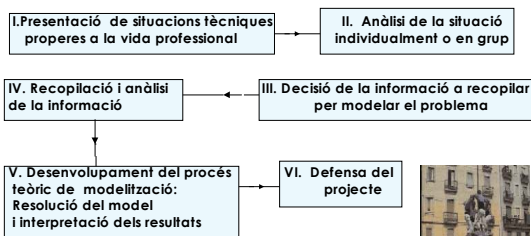


Treball en projectes: Aprenentatge cooperatiu

Es realitza en grup i a fora de les aules.

1. Contracte professor-alumne del tema interdisciplinari a estudiar. Actes regulars.
2. Familiarització i recerca d'informació.
3. Construcció del model.
4. Simulació i interpretació. Us d'ordinador
5. Desenvolupar la memòria: Portada, índex, explicació de la situació, del model i dels objectius, resolució del problema, inventari de conceptes matemàtics i extramatemàtics, conclusions i comentaris, bibliografia.
6. Defensa pública del projecte, es enregistra en vídeo.

La implementació dels projectes



El treball en grup: una característica dels projectes



Taller de matemàtiques i tecnologia. Descripció d'alguns models experimentats

1. Masses i ressorts.
2. Anàlisi del flux de circulació de vehicles en una intersecció de tràfic.
3. Elaboració de vins.
4. Estudi d'electrocardiogrames mitjançant Fourier.
5.

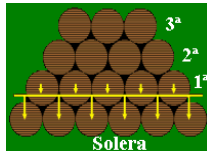
Intersecció regulada por semàfors

Elecció d'una cruïlla. Recerca de la densitat de vehicles. Construir una maqueta i simular en flash. Lleis de Kirchoff i teoria de grafs.

Intersecció regulada per semàfors de la ciutat de Mollerusa

Elaboració de vins

El vi més vell està situat a la fila inferior de barriques i el més nou en el pis de més amunt. Cada any, la meitat del contingut dels barrils que toquen a terra es posa en ampelles com a vi de xerès i s'omple amb vi de la fila immediata superior. El procés es completa afegint vi novell als barrils de la filera de més amunt. El problema és la recerca d'un model matemàtic que ens determini la quantitat de vi de n anys que s'extreu de k files de k barrils (Larson, 2003. Càlculo).



$$f(n, k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^k} \quad \text{para } k \leq n$$

Electrocardiogrames

Voltatge: eix d'ordenades.
 Temps: eix d'abscises.
 Velocitat del paper 25mm/seg.
 Cada mil·límetre en les abscises correspon a 0.04 seg.

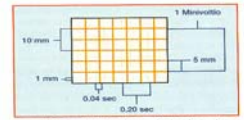
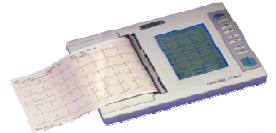


Figura 10. Característiques del paper utilitzat en electrocardiografia.

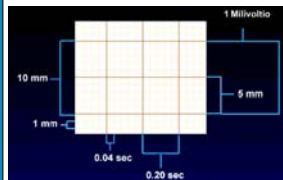
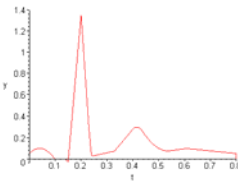


Figura 11. Representació del latido cardiaco en el electrocardiograma (ECG).

Simulació amb MAPLE 9.5



Electrocardiograma real d'una persona sana de 40 anys

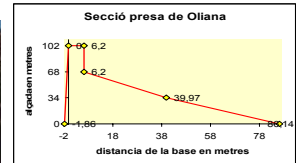
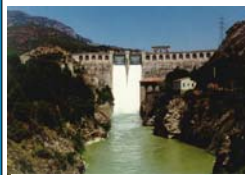


```

2 sin(5.714285714 * t + 2.702702703 * pi) - 1      -t < 0 and t < 0.08
-2.5 t + 2.5                                     0.08 - t < 0 and t < 0.1
0                                                 1 - t < 0 and t < 0.14
-3 t + 4.2                                       1.4 - t < 0 and t < 0.15
27.6 t - 4.17                                    1.5 - t < 0 and t < 0.2
-35 t + 8.35                                    2 - t < 0 and t < 0.23
-27.5 t + 6.625                                 0.23 - t < 0 and t < 0.24
55 t - 108                                       2.4 - t < 0 and t < 0.33
2.91 t - 8850                                    3.3 - t < 0 and t < 0.39
2 sin(9.280742459 * t + 6.493506494 * pi) - 1    3.9 - t < 0 and t < 0.44
2 sin(1.428571429 * t + 7.009796708 * pi) + 2.075 4.4 - t < 0 and t < 0.53
35 t - 114                                       5.3 - t < 0 and t < 0.6
-25 t + 25                                       6 - t < 0 and t < 0.8
    
```

$$\text{plot}\left(\frac{3195816819}{2} + \left(\sum_{n=1}^{50} \left(\cos\left(\frac{n 2 \pi t}{.8}\right) a_n + \sin\left(\frac{n 2 \pi t}{.8}\right) b_n\right)\right), t = 0 .. 2.4, \text{colour} = \text{red}\right)$$

Altres situacions



$$f(x) = \begin{cases} 0.012 \cdot x^2 + 2.25 \cdot x + 104.77 & 86.14 \geq x \geq 6.2 \\ 102 & 6.2 > x > 0 \\ 54.84 \cdot x + 102 & 0 \geq x \geq -1.86 \end{cases}$$



Eina d'avaluació

- Disseny global:** Recerca d'informació
- Contingut matemàtic:** Formulació, rigor del llenguatge, habilitat en la resolució, correcció en els resultats.
- Claredat:** Explicacions clares i precises.
- Actitud matemàtica:** esperit d'investigació, matematització de situacions.
- Conclusions:** Adequació als objectius.

Alguns comentaris dels alumnes

- " He après les aplicacions de les matemàtiques en la vida quotidiana d'un enginyer "
- " Identifico la llei de Hooke i Kirchoff i alhora m'adono que té altres aplicacions, a part de les molles, elèctriques "
- " El modelatge és un mètode important perquè et presenta situacions reals que pots resoldre matemàticament. En el mètode tradicional no t'adones de la importància de les matemàtiques a la vida quotidiana "
- "A través de mostrar situaciones de la vida real, he aprendido ecuaciones diferenciales y en donde se aplican. Este método de enseñanza es mejor que el tradicional puesto que con la práctica voy aprendiendo los conceptos de una manera gradual y vas relacionandolos con sus aplicaciones "
- " Penso que es podrien fer mes treballs del tipus "projecte". Estimula el poder aprendre més autodidàcticament "

Detall de comentaris vers l'ensenyament tradicionalcoses negatives

que no ensenyen
perquè serveix la matemàtica
L'aplicació a la vida
real.

b) El creatiu (basat en un procés de modelització d'una situació real).

Crec que aquest mètode és important, pp et
trabaja amb situacions reals que amb l'ajut de les
matemàtiques pots resoldre; cosa que amb el mètode
industrial, no et dona sentit de l'importància que tenen les
4 Si consideres que has après quelcom, indica en el següent recullades les matemàtiques
tes impressions de la unitat didàctica que has escollit tot indicant el que
has après i les dificultats que has trobat.

la vida
matemàtica

Pregunta que en certa ocasió li van formular a Puig Adam, als voltants de l'any 1950, en relació a l'aprenentatge cooperatiu i al treball en projectes:

Sus alumnos hacen lo que quieren?

Resposta de Puig Adam:

No, quieren lo que hacen

**“Aprenc per ensenyar i ensenyo per aprendre”
(Ll. Santaló)**

La modelització matemàtica:**Una proposta vàlida per l'ensenyament/aprenentatge**

-Construcció de models i l'ús de models per l'ensenyament/aprenentatge: **problem solving**.

La modelització es pot concretar partint d'un problema real que es planteja en termes tècnics i conduir a un problema matemàtic que culmina en la formulació d'expressions (per exemple equacions) que descriuen el problema; tot seguit es resol el problema matemàtic i aleshores cal la interpretació de les solucions i la comparació amb la situació real

La modelització provoca:

1. Reforça el coneixement interdisciplinari ja que involucra conceptes d'altres branques de coneixement, potencia l'esperit crític, la recerca d'informació i el treball en grup.
2. Destaca el caràcter formatiu de les matemàtiques i fomenta el gust per les mateixes i la motivació dels alumnes.
3. A nivell internacional està força consensuat que la modelització és una eina útil i eficient per l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques. Exemples: CERME4, ICME, ICTMA12 (només de modelització),.....

Es pot consultar: www.upc.edu/epsevg/modelitzacio

Conclusions generals

1. Les aplicacions i el modelatge matemàtic constitueixen una forma de **motivació** dels alumnes.
2. Les aplicacions del modelatge com una **component cultural**.
3. El modelatge constitueix una forma d'evitar **aprenentatges incorrectes**.
4. El modelatge com a forma de **reconeixement d'estructures**.
5. El modelatge proporciona una **visió diferent i integradora de les matemàtiques**.
6. La modelització destaca els aspectes **epistemològics, cognitius i heuristics**

APRENDRE MENYS RUTINES I MES CREATIVITAT

El modelatge, és una eina innovadora d'ensenyament eficient, i una **correja de transmissió** que proporciona l'adquisició de coneixements i agermana matemàtica i realitat.

"La modelització matemàtica és l'art d'aplicar les matemàtiques a la vida real" M.Niss

Construcció d'una web





<http://www.upc.edu/epsevg/modelitzacio/>



Referències bibliogràfiques

- Alsina, C. Burgués, C. Fortuny. 2001. "Ensenyar Matemàtiques". Graó.
- Alsina, C. 1998 "Contar bien para vivir mejor". Rubes
- Carroll, L. "Alicia en terra de meravelles"
- COMAP. 2000. "Matemáticas y vida cotidiana". Addison-Wesley.
- Gómez, J. 2000. "Per un nou ensenyament de les matemàtiques". Edit. CEAC
- Gómez, J. 2002. "De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas" Edit. Paidós
- Gómez, J. 2007 "La matemática como reflejo de la realidad". FESPM
- Guzmán, Miguel (xxxx): Qualsevol dels nombrosos textos
- Puig Adam, P. "Cálculo Integral". Edición 1972
- Web: <http://www.upc.edu/epsevg/modelitzacio/>

Alguns exemples

- El cub: Model geomètric a partir d'un joc 
- Cilindres d'igual superfície: juguem amb papers 
- L'agulla d'estendre 
- El rotlle de paper 
- Universo Matemático. Matemáticas y realidad. TV2. 