Tot analitzant un problema matemàtic a l'ombra dels gegants

JOSEP PLA I CARRERA

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

DMSEC
DIPLOMA DE MATEMÀTIQUES PER A LA SECUNDÀRIA

Universitat Pompeu Fabra
Campus de la Ciutadella

Barcelona, dia 16 d'octubre de 2009

Índex

Tot analitzant un problema matemàtic a l'ombra dels gegants

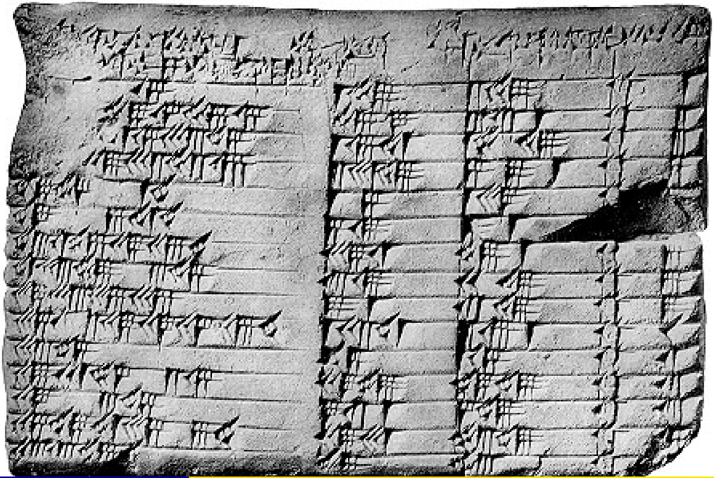
Alguns textos

d'èpoques i civilitzacions diverses

El Plimpton 322_(0)

A Mesopotàmia, entre el 1900 i el 1600 aC, s'elaborà la tauleta **Plimpton 322** de la col·lecció Plimpton (Universitat de Columbia).

◂ Plimpton 322_(1) ▸ Plimpton 322_(2)



Un resultat dels *Elements*

Al **lema 1** de la **proposició 28** del **llibre x** dels *Elements* d'EUCLIDES, llegim l'enuciat següent:

Eὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμος, ὥστε καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αυτῶν είναι τετράγωνον υςαριθμος

Trobar dos nombres quadrats que, sumats, donin un quadrat.

Eulides_(1)

Un resultat del *Jiuzhang suanshu*

El **problema 14** del capítol nové del *Jiuzhang suanshu* (*Els nou capítols de l'Art matemàtica (xinesa)*) diu:

Xina_(1)

今有上禾五秉，損實一斗一升，當下禾七秉；上禾七秉，損實二斗五升，當下禾五秉。問上、下禾實一秉各幾何[四四]。

答曰：

上禾一秉五升，

下禾一秉二升。

術曰：如方程。置上禾五秉正[四五]，下禾七秉負，損實一斗一升正。言上禾五秉之實多，減其一斗一升，餘，是與下禾七秉相當數也。故互其算，令相折除，以一斗一升為差。為差者，上禾之餘實也。次置上禾七秉正，下禾五秉負，損實二斗五升正。以正負術入之。按：正負之術，本設列行，物程之數不限多少，必令與實上下相次，而以每行各自為率[四六]。然而或減或益，同行異位殊為二品，各自并、減，之差見於下也[四七]。

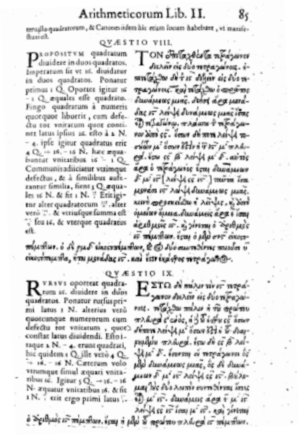
***Problema* 14.** *Dos homes* **A** *i* **B** *es troben en el mateix punt.* **A** *i* **B** *es posen a caminar amb velocitats que estan en la raó* **7** *a* **3**. **B** *camina cap a l'oest.*

En canvi, **A** *camina* **10** *unitats de longitud cap al nort primer i després en diagonal cap al sudoest per trobar* **B**. *Quina és la distància que camina cada un d'ells?*

Un resultat de l'*Diophanti Arithmeticorum*

El **problema VIII** del capítol segon de l'*Diophanti Alesandrini Arithmeticorum* (edició de BACHET DE MÉZIRIAC, 1621) de DIOFANT D'ALEXANDRIA diu:

◂ Diofant_(1)



Arithmeticorum Lib. II. 85

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 – 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. – 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. – 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 – 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. ¹⁶⁄₅ Erit igitur alter quadratorum ²⁵⁶⁄₂₅. alter verò ¹⁴⁴⁄₂₅. & vtriusque summa est ⁴⁰⁰⁄₂₅. seu 16. & vterque quadratus est.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16. diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. – 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. – 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. – 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. ¹⁶⁄₅ erit ergo primi latus ¹⁶⁄₅.

***Problema* VIII*, llibre segon*.**
Propositum quadratum dividese in duos quadratos.

***Problema* VIII*, llibre segon*.**
Es proposa dividir un quadrat en dos quadrats.

Una observació de PIERRE DE FERMAT

Observació al problema VIII, del llibre segon de l'edició de BACHET de l'Arithmetica de DIOFANT.

Décomposer un cube en deux autres cubes, une quatrième puissance, et généralement une puissance quelconque en deus puissances de même nom au dessus de la seconde puissance, est une chose impossible, et j'en ai assiurément trouvé l'admirable démonstration. La marge trop exiguë ne la contiendra pas.

Fermat_(1)

Un problema de BACHET i un altre de FERMAT

Teorema de Bachet.

Tout nombre entier est somme de 4 carrés, ou moins. Bachet_(1)

Teorema de Fermat (a MERSENNE, de setembre de 1636).

1° *Omnis numerus æquatur uni, duobus aut tribus triangulis,*

uni, 2, 3 *aut* 4.............. *quadratis,*
uni, 2, 3, 4 *aut* 5........... *pentagonis,*
uni, 2, 3, 4, 5 *aut* 6......... *hexagonis,*
uni, 2, 3, 4, 5, 6 *aut* 7....... *heptagonis,*

et eo continuo in infinitum progressu.

Teorema de Fermat (a PASCAL, 25 de setembre de 1654).

Tout nombre entier est somme de 3 triangulaires, ou moins, 4 carrés ou moins, cinc pentagonals, ou moins, ad infinitum. Euler_(1)

Són problemes que daten del 1621 i del 1636, respectivament.

Un teorema i una conjectura de WARING

Waring_(1)

Waring's problem.

Every number is the sum of at most **4** *squares, or* **9** *cubes, or* **19** *fourth powers*.

Waring's conjecture.

For every natural number $\mathbf{k}$*, there exists an associated positive integer* $\mathbf{s}(\mathbf{k})$ *such that every natural number* $\mathbf{N}$ *is the sum of at most* $\mathbf{s}$ $\mathbf{k}$*-th powers of natural numbers*.

Formalment, per a cada $\mathbf{N}$ i $\mathbf{k}$, existeix un $\mathbf{s}(\mathbf{k})$ que satsifà

$$\mathbf{N} = \mathbf{n}_1^{\mathbf{k}} + \cdots + \mathbf{n}_{\mathbf{s}(\mathbf{k})}^{\mathbf{k}}.$$

El **problema** i la **conjectura de Waring** fou proposat l'any 1770 per EDWARD WARING a l'obra *Meditationes Algebraicæ*.

El segle VI aC

Els primers filòsofs i matemàtics

El segle VI aC, a Occident, es produí un fet realment important: el naixement de la racionalitat grega. És a dir, la recerca d'explicacions racionals davant d'explicacions místiques.

Els noms més rellevants són:

1. ANAXIMANDRE DE MILET [611 aC–547 aC]: "El principi de tot és l'il·limitat". Féu el primer model de l'univers, és a dir, del sistema solar.
2. TALES DE MILET [530 aC–546 aC]: "Tot està fet d'aigua". (G)
3. ANAXÍMENES [585 aC–524 aC]: "Tot està fet d'aire".
4. PITÀGORES DE SAMOS [585 aC–500 aC]: "Tot és nombre". (G)
5. HERÀCLIT [544 aC–483 aC]: "Tot flueix. Ningú no creà el món que és etern".
6. ANAXÀGORES DE CLAZÒMENES [500 aC–428 aC]: "La raó governa el món".

Els primers filòsofs d'Orient

El segle VI aC, a Orient, també fou molt especial. Aparagueren alguns dels més grans ideòlegs i místics de la història del pensament religiós.

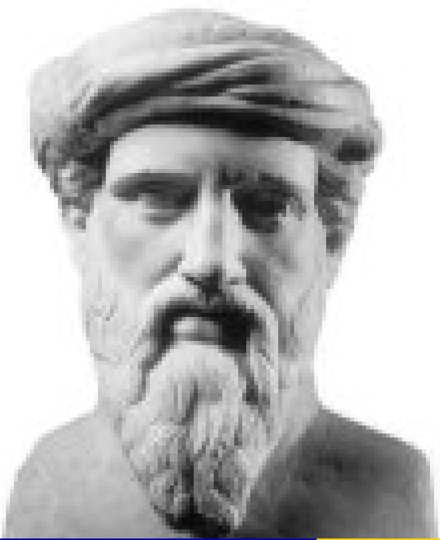
Els noms més rellevants són:

1. SIDDHARTA GAUTAMA, més conegut com Buda [Kapilavastu, Lumbini, actual Nepal, ∼566 aC–∼486 aC]: Pare del budisme.
2. CONFUCI [Kôngī, ∼ 551 aC–∼479 aC]: Pare del confucianisme.
3. LAO TSÉ, que prové de *Laozi*, gran mestre [segle VI aC]: Pare del daoisme.

Reflexions

al voltant dels nombres figurats

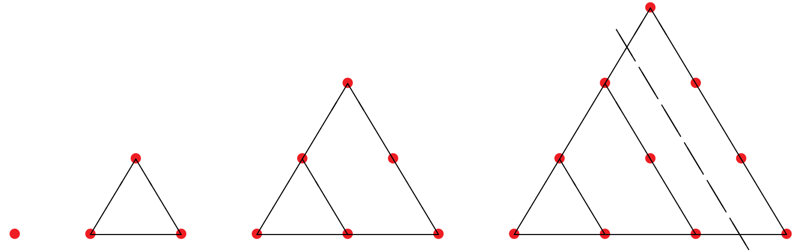
PITÀGORES DE SAMOS



PITÀGORES DE SAMOS

Samos, ~569 aC
Metapont, Magna Grècia, ~475

Els nombres figurats: triangulars



etc.

$t_1 = \mathbf{1}$ $\quad t_2 = \mathbf{3}$ $\quad t_3 = \mathbf{6}$ $\quad t_4 = \mathbf{10}$ etc.

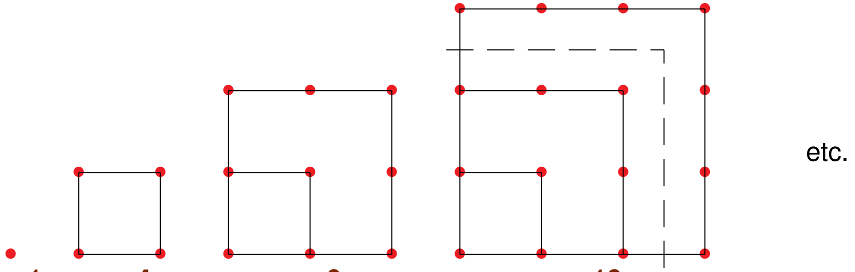
$$t_n = \mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} + \cdots + (\mathbf{n} - \mathbf{1}) \quad + \mathbf{n} = \left(\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}\right)$$

Els nombres naturals són els gnòmons dels nombres triangulars. De fet, doncs,

el triangular t_n és la suma dels nombres **n** primers naturals consecutius.

1, **3**, **6**, **10**, **15**, **21**, **28**, **36**, **45**, **55**, **66**, **78**, **91**, **105**, **120**, **136**, etc.

Els nombres figurats: quadrats



$q_1 = \mathbf{1}$ $q_2 = \mathbf{4}$ $q_3 = \mathbf{9}$ $q_4 = \mathbf{16}$ etc.

$$q_n = \overbrace{\overbrace{\mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{5} + \cdots + \mathbf{(2n\text{-}3)}}^{\mathbf{(n\text{-}1)}^2} \;\Big|\; + \mathbf{(2n\text{-}1)}}^{\mathbf{n}^2} \;\Big|\; + \mathbf{(2n+1)} = \mathbf{(n+1)}^2$$

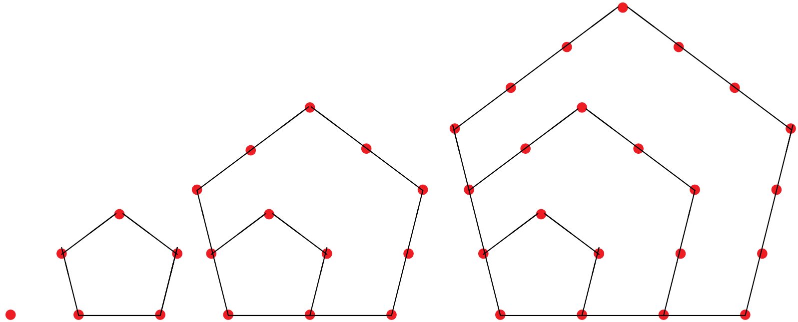
ternes pitagòriques 1

ternes pitagòriques 2

Els nombres senars són els gnòmons dels nombres quadrats.

El quadrat q_n és la suma dels nombres **n** primers nombres senars consecutius: **1**, **4**, **9**, **16**, **25**, **36**, **49**, **64**, **81**, **100**, **121**, **144**, **169**, **196**, **225**, **256**, etc.

Els nombres figurats: pentagonals



etc.

$p_1 = \mathbf{1}$ $p_2 = \mathbf{5}$ $p_3 = \mathbf{12}$ $p_4 = \mathbf{22}$ etc.

Primera parada

EXERCICIS PER GENERALITZACIÓ

1. Quins són els nombres pentagonals?
2. Trobar els gnòmons dels nombres pentagonals?
3. Trobar una fórmula **pent**(**n**) que proporcioni els pentagonals; és a dir, per a cada **n**, $p_{\mathbf{n}} = \mathbf{pent}(\mathbf{n})$.
4. Dibuixa i compta els hexagonals, heptagonals, etc.
5. Si acceptem que els nombres **q**-gonals s'obtenen per una fórmula del tipus
$$(q_{\mathbf{n}} :=)\, \mathbf{q}(\mathbf{n}) = \mathbf{a_q}\, \mathbf{n}^2 + \mathbf{b_q}\, \mathbf{n} + \mathbf{c_q},$$
quins són els valors $\mathbf{a_q}$, $\mathbf{b_q}$ i $\mathbf{c_q}$ que corresponen, per a cada **q**, als **q**-gonals $q_{\mathbf{n}}$?
6. Amb la calculadora **Wiris** fes un programa que, si li dones **n** faci la taula dels nombres **n**-gonals $\leq \mathbf{1000}$, i si li dones **0** faci la taules del **n**-gonals, amb $\mathbf{3} \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{6}$ més petits que **100**.

Observació 1. La conjectura de Fermat

N	T	Q	P	H
5	1 + 1 + 3	1 + 4	5	1 + 1 + 1 + 1 + 1
7	1 + 3 + 3	1 + 1 + 1 + 4	1 + 1 + 5	1 + 6
	1 + 6			
15	15	1 + 1 + 4 + 9	1 + 1 + 1 + 12	1 + 1 + 1 + 6 + 6
16	1 + 15	16	1 + 1 + 1 + 1 + 12	1 + 1 + 1 + 1 + 6 + 6
21	21	1 + 4 + 16	1 + 5 + 5 + 5 + 5	6 + 15
22	1+21	1 + 1 + 4 + 16	22	1 + 6 + 15
103	10 + 15 + 78	1 + 1 + 1 + 100	1 + 51 + 51	12 + 12 + 91
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

EXERCICI DE CONJECTURA

1. Conjecturar la validesa dels teoremes de BACHET-EULER-LA- GRANGE, de LEGENDRE-GAUSS, i de CAUCHY.
2. Fer un programa que, donat un nombre natural **N**, l'escrigui com a suma de **n** nombres **n**-gonals, suposant que **0** és **n**-gonal.

Pierre de Fermat

Conjectura de Fermat. *Tot nombre natural és la suma de* ***tres o menys*** *triangulars,* ***quatre o menys*** *quadrats,* ***cinc o menys*** *pentagonals,* ***sis o menys*** *hexagonals, etc, "ad infinitum".*

Pierre de Fermat

Beaumont-de-Lomagne,
17 d'agost de 1601
Castres, 12 de febrer de 1665

BACHET DE MÉZIRIAC

BACHET DE MÉZIRIAC, advocat de professió i matemàtic amateur, és conegut perquè, en 1620, va editar, amb comentaris, l'*Aritmètica* de DIOFANT D'ALEXANDRIA.

Fou el primer a enunciar el teorema, avui conegut com el **teorema de Bachet**:

*Tot nombre natural és la suma de **quatre o menys** quadrats.*

BACHET DE MÉZIRIAC

Bourg-en Bresse, 1581–1638

LEONHARD EULER

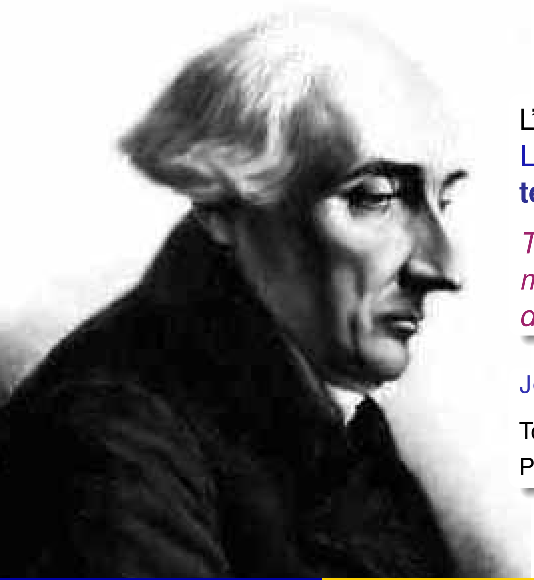
LEONHARD EULER intentà demostrar, durant quaranta anys, el **teorema de Bachet**.

La darrera, que era correcta, és de l'any 1772, però aleshores ja l'havia demostrat un matemàtic francès.

LEONHARD EULER

Basilea, 10 d'abril de 1707
Sant Petersburg,
18 de setembre de 1783

JOSEPH LOUIS LAGRANGE



L'any 1770 JOSEPH-LOUIS LAGRANGE demostra el **teorema de Bachet**.

*Tot nombre natural és la suma de **quatre o menys** quadrats.*

JOSEPH LOUIS LAGRANGE

Torí, 1736

París, 1813

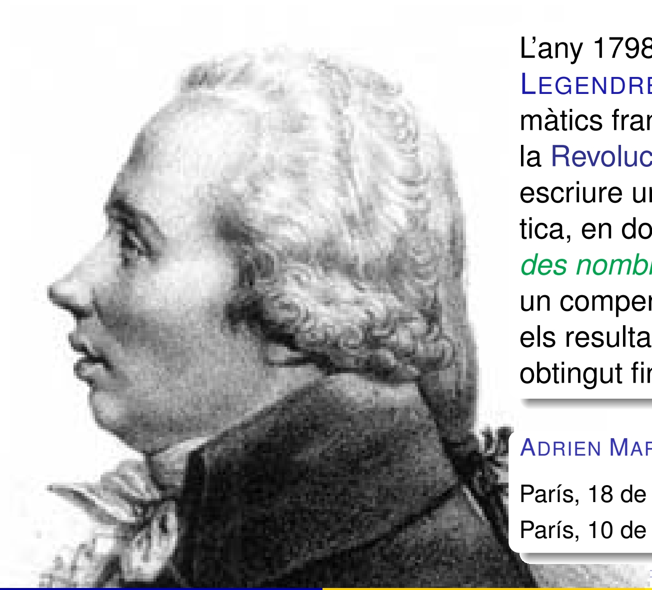
Suma de tres triangulars

El teorema segons el qual

tot nombre natural és la suma de tres triangulars

fou demostrat independentment per ADRIEN MARIE LEGENDRE, l'any 1798, i per CARL FRIEDRICH GAUSS l'any 1801.

ADRIEN MARIE LEGENDRE



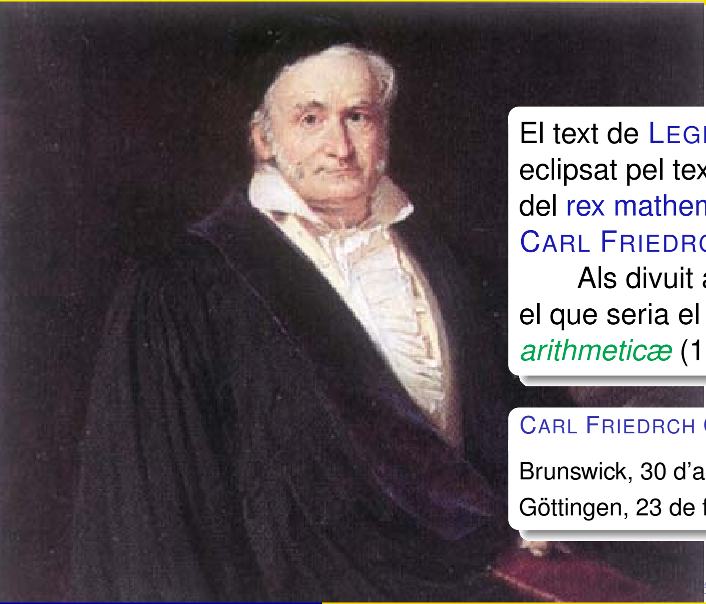
L'any 1798 ADRIEN MARIE LEGENDRE —un dels matemàtics francesos insignes de la Revolució francesa— va escriure un tractat d'aritmètica, en dos volums, *Théorie des nombres*, que volia ser un compendi novedós de tots els resultats que s'havien obtingut fins aleshores.

ADRIEN MARIE LEGENDRE

París, 18 de setembre de 1752

París, 10 de gener de 1833

CARL FRIEDRICH GAUSS



El text de LEGENDRE es veié eclipsat pel text fonamental del rex mathematicorum: CARL FRIEDRCH GAUSS.

Als divuit anys començà el que seria el *Disquistiones arithmeticæ* (1801).

CARL FRIEDRCH GAUSS

Brunswick, 30 d'abril de 1770

Göttingen, 23 de febrer de 1855

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY

L'any 1815 AUGUSTIN LOUIS CAUCHY demostrà el teorema general de Fermat:

*Tot nombre natural és la suma de **tres o menys** triangulars, **quatre o menys** quadrats, **cinc o menys** pentagonals, **sis o menys** hexagonals, ad infinitum.*

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY

París, 21 d'agost de 1789

Sceaux, París, 23 de maig de 1857

Segona parada

Exercici per analogia

1. Els nombres de Fibonacci són: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 35, etc., que s'obtenen recurrentment de

$$f_0 = 1, f_1 = 1, \text{ i } f_{n+2} = f_n + f_{n+1}.$$

   Conjecturem:

   Tot nombre natural és la suma de nombres de Fibonacci diferents?

   Procedim per analogia. Pot passar que la nostra conjectura sigui certa o falsa. Podem fer proves que la facin plausible, però fins que no tinguem una demostració no podrem estar segurs de res.
2. Sabries fer un **programa** que generi tot els nombres de Fibonacci i un altre que resolgui la conjectura?
3. Saps d'altres nombres que permetin construir qualsevol nombre natural?

Les ternes pitagòriques

Les ternes pitagòriques

Els nombres quadrats —i, en concret, els **gnòmons**— són útils per a determinar les **ternes pitagòriques**. És a dir, per a determinar tres nombres naturals **m**, **n** i **p** que satisfan

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{m}^2 + \mathbf{n}^2.$$

De fet, quan a un nombre quadrat li agegim el seu gnòmon, obtenim el nombre quadrat següent.

El primer matemàtic que observà aquest fet, a Occident, fou PITÀGORES DE SAMOS.

Un problema que pot aparèixer és que **no** siguin ternes pitagòriques **simples**; és a dir, sense divisors comuns.

Les ternes pitagòriques

gnomon de quadrats

En concret, com hem vist,

$$\mathbf{n^2} + \text{gnòmon}(\mathbf{n}) = (\mathbf{n+1})^2.$$

Però gnòmon($\mathbf{n}$) $= \mathbf{2n+1}$. O sigui

$$\mathbf{n^2} + (\mathbf{2n+1}) = (\mathbf{n+1})^2.$$

Cal, doncs, que gnòmon($\mathbf{n}$) $= \mathbf{2n+1}$ sigui un quadrat. És a dir,

$$\mathbf{2n+1} = \mathbf{m^2}, \quad \mathbf{m} \text{ senar.}$$

D'on:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{m^2-1}}{\mathbf{2}}, \quad \mathbf{m}, \quad (\mathbf{n+1}) = \frac{\mathbf{m^2+1}}{\mathbf{2}}.$$

Si ara donem a $\mathbf{m}$ valors senars arbitaris $> \mathbf{1}$ tindrem una infiniat ternes pitagòriques.

Les ternes pitagòriques

TERNES PITAGÒRIQUES DE PITÀGORES

m	$n=\frac{m^2-1}{2}$	m	$n+1=\frac{m^2+1}{2}$
3	4	3	5
5	12	5	13
7	24	7	25
9	40	9	41
11	60	11	61
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tercera parada

EXERCICIS

1. Fes un programa que generi aquestes ternes pitagòriques.
2. Constata que no hi ha pas totes les ternes pitagòriques possibles.
3. Demostra que *totes són simples*; és a dir, no tenen divisors comuns.

PLATÓ

PLATÓ va pensar que, en lloc d'un sol gnòmon, en podia usar dos.

PLATÓ

Atenes, 427 aC

Atenes, 347 aC

El retrat forma part de l'*Escola d'Atenes* de RAFAEL.

Quarta parada

EXERCICIS

1. Fes un programa que generi totes ternes pitagòriques de Plató.
2. Constata que no hi ha pas totes les ternes pitagòriques possibles.
3. Demostra que les *ternes simples* s'alternen amb *ternes no-simples*.

Les ternes pitagòriques

gnomon de quadrats

$$(\mathbf{n}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}+\overbrace{(2n-1)+(2n+1)}^{\mathbf{4n}}=(\mathbf{n}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}.$$

Cal, doncs, que $\mathbf{4n}=\mathbf{m^2}$, amb $\mathbf{m}=\mathbf{2m_1}$. Per tant, cal que $\mathbf{n}=\mathbf{m_1^2}$.
D'on en resulta que les ternes vénen donades per:

$$\mathbf{m_1^2-1},\ \ \mathbf{2m_1},\ \ \mathbf{m_1^2+1},\ \text{amb } \mathbf{m_1} \text{ parell.}$$

TERNES PITAGÒRIQUES DE PLATÓ

$\mathbf{m_1}$	$\mathbf{m_1^2-1}$	$\mathbf{2m_1}$	$\mathbf{m^2+1}$
2	**3**	**4**	**5**
3	8	6	10
4	**15**	**8**	**17**
5	24	10	26
6	**35**	**12**	**37**
8	**63**	**16**	**65**
10	**99**	**20**	**101**
⋮	⋮	⋮	⋮

Les ternes pitagòriques

Problema I. *El mètode del gnòmon val en general per a determinar l'expressió de les ternes pitagòriques*.

[*Indicació*. Cal passar de $\mathbf{m}$ a $\mathbf{m} + \mathbf{k}$. Es pot fer de dues maneres, amb un nombre parell de gnòmons o amb un nombre senar.]

Mai, però, no he vist ningú que el faci servir.

Les ternes pitagòriques

L'**algorisme** que genera **totes** les ternes pitagòriques és el següent:

$$\mathbf{m} = \mu^2 - \lambda^2, \quad \mathbf{n} = 2\lambda\mu, \quad \mathbf{p} = \mu^2 + \lambda^2,$$

amb λ i μ sense divisors comuns i de diferent paritat.

euclides_(0)

Demostració euclidiana.

Siguin $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ tres nombres naturals que satisfan $\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$. Aleshores, si dos a dos no tenen cap divisor comú, aleshores

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{c}^2 - \mathbf{b}^2 = (\mathbf{c} + \mathbf{b})(\mathbf{c} - \mathbf{b}), \mathbf{b} \text{ i } \mathbf{c} \text{ senars, i } \mathbf{a} \text{ parell.}$$

A més, $\frac{\mathbf{c}+\mathbf{b}}{2}$ i $\frac{\mathbf{c}-\mathbf{b}}{2}$ són primers entre si. D'on:

$$\frac{\mathbf{c}+\mathbf{b}}{2} = \lambda^2 \text{ i } \frac{\mathbf{c}-\mathbf{b}}{2} = \mu^2, \text{ amb } \lambda \text{ i } \mu \text{ primers entre si.}$$

La resta és un simple exercici.

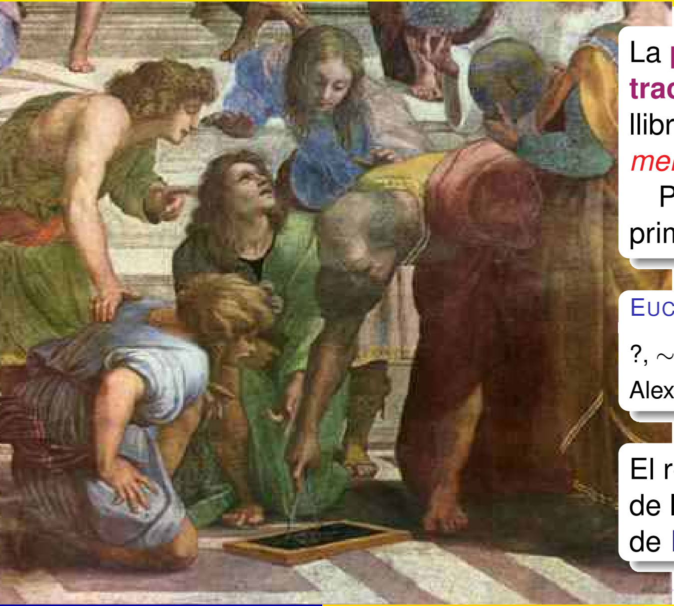
Les ternes pitagòriques

Ara la taula és:

λ	μ	$\mu^2 - \lambda^2$	$2\lambda\mu$	$\mu^2 + \lambda^2$
1	2	3	4	5
1	4	15	8	17
1	6	35	12	37
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	3	5	12	13
2	5	21	20	29
2	7	45	28	53
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	4	7	24	25
3	8	55	48	73
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Problema II. *Fes un algorisme que els vagi determinant, imposant, però, que la hipotenusa sigui* $<$ **10 000**.

EUCLIDES



La **primera demostració** la trobem al llibre X dels *Elements* d'EUCLIDES.

Però no fou pas el primer a conèixer-lo.

EUCLIDES

?, ∼350 aC

Alexandria, ∼265 aC

El retrat forma part de l'*Escola d'Atenes* de RAFAEL.

El Plimpton 322

El Plimpton 322_(1)

El **Plimpton 322** consta de **quatre** columnes de nombres, que **no** són immediatament desxifrables. Està deteriorada i s'ha hagut de refer.

◂ Plimpton 322_(0) ▸ Plimpton 322_(2) ▸ Plimpton 322_(3)

Columna I ?	Columna II catet *b*		Columna III hipotenusa *c*		Columna IV fila
[1,59],0,15	1,59		2,49		1
[1,56,56], 58,14,50,6,15	56,7		3,12,1	(4)	2
[1,55,7, 4]1,15,33,45	1,16,41		1,50,49		3
[1,53,10], 29,32,52,16	3,31,49		5,9,1		4
[1,] 48,54,1,40	1,5		1,37		5
[1,] 47,6,41,40	5,19		8,1		6
[1,] 43,11,56,28,26,40	38,11		59,1		7
[1,] 41,33,59,3,45	13,19		20,49		8
[1,] 38,33,56,36	9,1	(1)	12,49		9
[1,] 35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41		2,16,1		10
[1,] 33,45	45,0		1,15,0		11
[1,] 29,21,54,2,15	27,59		48,49		12
[1,] 27,0,3,45	7,12,1	(2)	4,49		13
[1,] 25,48,51,35,6,40	29,31		53,49		14
[1,] 23,13,46,40	56		53	(3)	15

El Plimpton 322

Aquesta taula, un cop traduïda a xifres, proporciona, en la segona i tercera columnes, els nombres de la taula següent.

f	b	c
1	**119**	**169**
2	**3 367**	**4 825**
3	**4 601**	**6 649**
4	**12 709**	**18 541**
5	**65**	**97**
6	**319**	**481**
7	**2 291**	**3 541**
8	**799**	**1 249**
9	**481**	**769**
10	**4 961**	**8 161**
11	**45**	**75**
12	**1 679**	**2 929**
13	**161**	**289**
14	**1 771**	**3 229**
15	**56**	**106**

S'han hagut de corregir alguns errors, però aleshores **c** i **b** són, respectivament, la hipotenusa i el catet senar d'una terna pitagòrica.

Falta el catet parell.

Totes les ternes són **simples** menys dues: les de les files 11 i 15.

El Plimpton 322_(2)

D'acord amb la interpretació que se n'ha fet, la tauleta **té quatre errors** dels quals solament un és difícil de justificar.

Error	Explicació
1	Podria ser d'escriptura, atès que en lloc del valor **9**, **1** hi hauria d'haver **8**, **1**.
2	En lloc de **7**, **12**, **1**, hi hauria d'haver **2**, **41**, que n'és l'arrel quadrada.
3	Hi trobem **53**, quan hi hauria d'haver **1**, **46**, que n'és el doble.
4	S'hauria de substituir **3**, **12**, **1**, per **1**, **20**, **25**. I això és difícil de justificar, malgrat que s'han trobat explicacions més o menys plausibles.

Plimpton 322_(1)

El Plimpton 322

La qüestió és: Quin és el contingut i el significat d'aquesta tauleta?

Si la comparem amb una taula de ternes pitagòriques ens trobem amb què el **Plimpton 322**, en les columnes II i III, conté un dels catets i la hipotenusa d'un triangle rectangle aritmètic. Dit d'una altra manera:

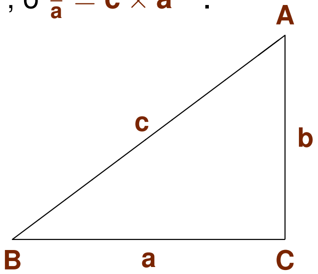
a	b	c	μ			λ		
120	119	169	12	=	$2^2 \times 3$	5	=	5
3456	3367	4825	64	=	2^6	27	=	3^3
4800	4601	6649	75	=	3×5^2	32	=	2^5
13.500	12.709	18 541	125	=	5^3	54	=	2×3^3
72	65	97	9	=	3^2	4	=	2^2
360	319	481	20	=	$2^2 \times 5$	9	=	3^2
2700	2291	3541	54	=	2×3^3	25	=	5^2
960	799	1249	32	=	2^5	15	=	3×5
600	481	769	25	=	5^2	12	=	$2^2 \times 3$
6480	4961	8161	81	=	3^4	40	=	$2^3 \times 5$
60	45	75	2	=	2	1	=	1
2400	1679	2929	48	=	$2^4 \times 3$	25	=	5^2
240	161	289	15	=	3×5	8	=	2^3
2700	1771	3229	50	=	$2 \cdot 5^2$	27	=	3^3
90	56	106	9	=	3^2	5	=	5

El Plimpton 322_(3)

Observem dos fets importants. Són ternes pitagòriques que, dins del sistema babilònic, corresponen a μ i λ **invertibles**. Això fa que $\mathbf{a} = \mathbf{2} \times \mu \times \lambda$ **sigui sempre invertible**.

Això pot fer-nos pensar en la possibilitat que la primera columna sigui de **tipus trigonomètric**: $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}^{-1}$, o $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}^{-1}$.

Si fem càlculs, observem que és $(\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}})^{\mathbf{2}}$ —és a dir, la columna I de la taula , que havíem indicat amb un interrogant(?) Plimpton 322_(1) — conté la **secant trigonomètrica** al qua- drat de l'angle $\hat{\mathbf{B}}$ que s'oposa al catet **b**. És a dir, $\sec^{\mathbf{2}} \hat{\mathbf{B}}$.



Sisena parada

EXERCICI. Determinar el valor del catet **a** que falta a la tauleta babilònica, suposant que **b** és l'altre catet i **c** la hipotenusa.

PROBLEMA III. *Escriu, en sistema decimal, el valors dels nombres que hem suposat que hi ha a la columna ? de la tauleta Plimpton 322.*

Cerca els valors de $\left(\frac{c}{a}\right)^2$.

Quin és el valor de l'angle $\hat{\mathbf{B}}$, si suposes que $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} = \sec \hat{\mathbf{B}}$?

El Plimpton 322

Observem finalment que la taula no està disposada de forma arbitrària.

L'angle $\hat{\mathbf{B}}$ del primer triangle és gairebé de **45**°, ja que

$$\tan \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{0}; \mathbf{59}, \mathbf{30} \simeq \mathbf{1}.$$

L'angle $\hat{\mathbf{B}}$ del darrer triangle és gairebé de **31**°, ja que

$$\sin \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{0}; \mathbf{31}, \cdots \simeq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

A més, els angles disminueixen **de grau en grau**.

No es tracta, doncs, d'una tauleta **teòrica** en la qual l'escriba s'entreté a calcular ternes pitagòriques pel plaer de fer-ho. Sembla més aviat una tauleta de caire aplicat —una taula **trigonomètrica**— molt més en la línia de les matemàtiques anteriors a Grècia.

Observem, doncs, per acabar que, si la interpretació del tauleta **Plimpton 322** és correcta, els matemàtics babilònics coneixien la fòrmula eucli- diana d'obtenció de ternes pitagòriques **força segles abans** que l'es- cola pitagòrica estudiés l'obtenció de ternes pitagòriques.

Intervé Liu Hui

Els *Nou Capítols de l'Art Matemàtica*

El **problema 14** dels *Nou Capítols de l'Art Matemàtica* és interessant per la manera com està resolt:

Xina_(0)

Resposta. **B** camina $10\frac{1}{2}$ unitats de longitud i **A** camina $24\frac{1}{2} = 14\frac{1}{2} + 10$ unitats de longitud.

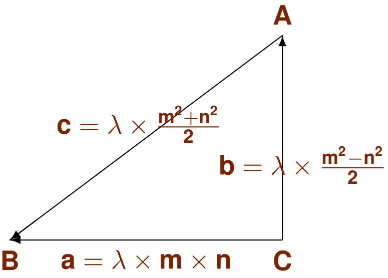
Anàlisi. Divideix per dos la suma dels quadrats de **7** i **3** $\left[=\frac{3^2+7^2}{2}\right]$.

Això dóna la raó amb la qual **A** camina per la diagonal.

Resta-ho del quadrat de **7** $\left[= 7^2 - \frac{3^2+7^2}{2} = \frac{7^2-3^2}{2}\right]$.

Tens la raó amb la qual **A** camina cap el nord.

La raó amb la qual **B** camina cap a l'oest és igual al producte de **7** i **3**.



Els *Nou Capítols de l'Art Matemàtica*

Fixem-nos que

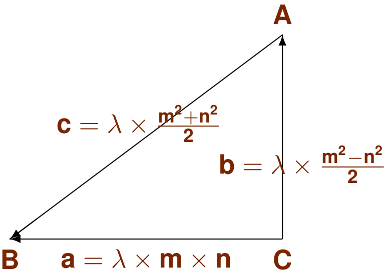
$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \lambda \times \mathbf{m}^2$$

i, en canvi,

$$\mathbf{a} = \lambda \times \mathbf{m} \times \mathbf{n}.$$

D'on:

$$\frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}.$$

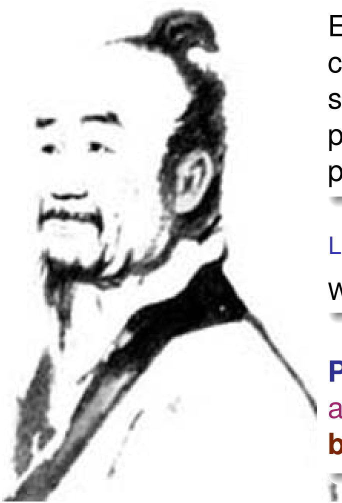


En el problema, $\mathbf{m} = \mathbf{7}$ i $\mathbf{n} = \mathbf{3}$.

Quanta imaginació!

Com havien trobat la llei de les ternes pitagòriques? No ho sabem!

LIU HUI



El matemàtic xinès LIU HUI —primer comentarista del *Nou Capítols*— fa servir l'euniciat del problema anterior per trobar la llei general de les ternes pitagòriques.

LUI HUI

Wei, Xina, ∼220–Xina, 280

Problema IV. Si $\mathbf{a}' = n$ i $\mathbf{b}' + \mathbf{c}' = m$, aleshores
$\mathbf{b}' : \mathbf{a}' : \mathbf{c}' = \frac{m^2-n^2}{2} : mn : \frac{m^2+n^2}{2}$.

Setena parada

EXERCICI. Sabries analitzar què és realment el que fa LIU HUI en l'anàlisi del problema dels *Nou capítols*?

Sabries veure que és una manera correcta de resoldre el problema?

Sabries resoldre'l d'alguna altra manera?

El teorema darrer de Fermat

El teorema darrer de Fermat i Andrew Wiles

Quan FERMAT va llegir l'*Aritmètica* de DIOFANT, traduïda per BACHET, la va anotar.

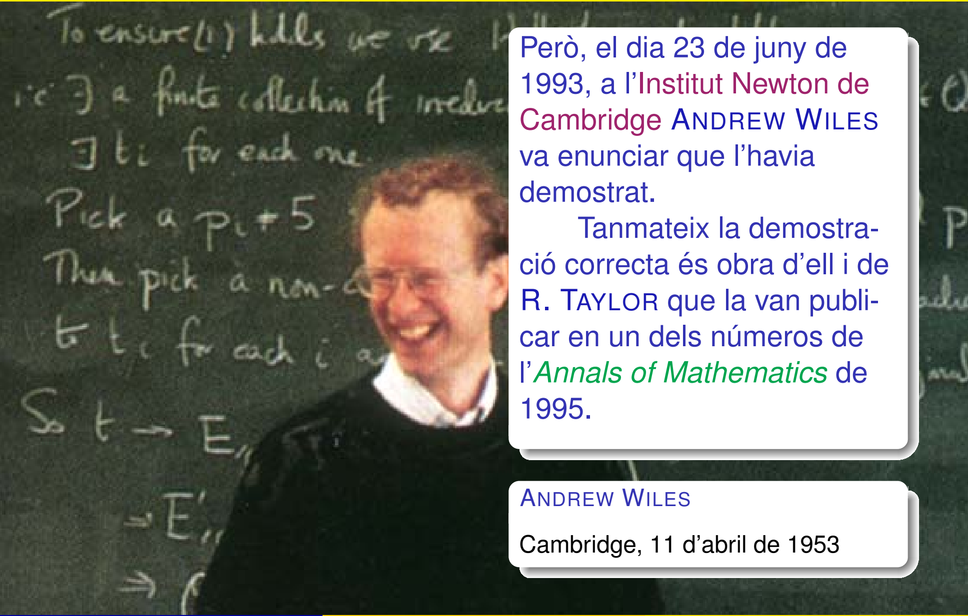
Fermat_(0)

Com és ben conegut, aquest enunciat portà per un camí molt productiu de la matemàtica del segles XVIII i XIX: generà la necessitat d'estudiar els cossos i anells de nombres i el prblema de factorització.

Fou la llavor de tota l'**àlgebra de les estructures algèbriques**, ampliant el domni d'estudi de l'àlgebra més enllà de l'estudi dels polinomis.

Semblava, però, un problema irresoluble.

El teorema darrer de Fermat i Andrew Wiles



Però, el dia 23 de juny de 1993, a l'Institut Newton de Cambridge ANDREW WILES va enunciar que l'havia demostrat.

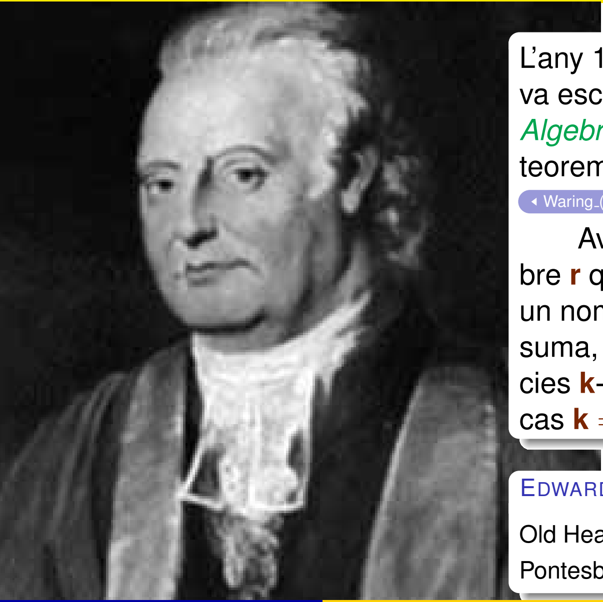
Tanmateix la demostració correcta és obra d'ell i de R. TAYLOR que la van publicar en un dels números de l'*Annals of Mathematics* de 1995.

ANDREW WILES

Cambridge, 11 d'abril de 1953

Apareix Edward Waring

EDWARD WARING



L'any 1770 EDWARD WARING va escriure *Mediatationes Algebraicæ* i va plantejar el teorema i la conjectura:

Waring_(0)

Avui es coneix el nombre **r** que cal per aconseguir un nombre natural **N** com a suma, com a màxim, **r** potències **k**-èsimes, llevat per al cas $\mathbf{k} = \mathbf{4}$.

EDWARD WARING

Old Heath, Shropshire, 1736

Pontesbury, 15 d'agost de 1798

DAVID HILBERT

La **conjectura de Waring** va ser demostrada l'any 1909, per un dels més grans matemàtics de finals del segle XIX i començaments del XX:

DAVID HILBERT

Königsberg, 23 de gener 1862
Göttingen, 14 de febrer de 1943

Darrera parada

EXERCICI. Conjectura que tot nombre natural es pot escriure com a suma de **4** quadrats (ja ho hem fet abans), de **9** cubs, de **19** quartes potències.

Sabries conjecturar un nombre per a les cinquenes potències?

Sabries fer un programa que t'escrigui qualsevol nombre natural com a suma de cubs?

I com a sumes de quartes potències?