La trisecció de l'angle i la resolució d'una equació cúbica

Anem a veure la relació existent entre tres qüestions aparentment diferents: la confecció de taules trigonomètriques, la trisecció de l'angle i la resolució d'equacions de tercer grau.

Les taules trigonomètriques

De tots és sabut que l'observació del firmament de nit va portar a l'humanitat a confegir un catàleg d'objectes astronòmics, fonamentalment un catàleg d'estels. Això era doblement important, ja que per una banda aquest catàleg permetia fer un càlcul aproximat de la latitud del lloc, sabent l'alçada d'un estel determinat en un moment de l'any establert. Això era important per la navegació no costera si es volia determinar cap a quina latitud es podia trobar un vaixell, sense referents de costa. Però hi havia una altra raó tant o més important per confegir un bon catàleg d'estels. Aquesta raó era la satisfacció de la curiositat humana, que no tenia prou en observar que hi havia una certa regularitat dels fenòmens astronòmics sinó que aspirava a descobrir el funcionament de l'Univers, i per fer-ho era imprescindible fer observacions el més acurades possibles.

L'observació sistemàtica dels cels va portar a tenir que mesurar l'alçada de cada estel sobre l'horitzó, i per fer això era necessari comptar amb certs aparells de mesura, i sobretot en unes bones taules trigonomètriques. Precisament la confecció d'aquestes taules va portar a l'estudi d'una gran part de matemàtiques basades en la geometria de les proporcions, i ja els indis i babilònics van deduir algorismes senzills sobre els quals construir unes primeres taules trigonomètriques.

Fent una recreació de les passes històriques que es van fer, podríem repensar la forma de procedir per poder elaborar una taula de sinus de grau en grau i veure les dificultats conceptuals que apareixerien en el procés. Podríem començar recordant que hi ha uns pocs angles que permeten calcular les seves raons trigonomètriques amb senzilles construccions geomètriques. Ens referim als angles de 30, 45 i 60 graus. A partir d'aquí i emprant les conegudes fórmules dels sinus de la diferència de dos angles podríem procedir al càlcul de l'angle de 15 graus. Trobaríem les raons següents:

$$\sin(15) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}; \qquad \cos(15) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

És prou evident que emprant les fórmules referides a l'angle meitat podríem calcular raons trigonomètriques d'angles més petits, però mai no arribaríem a obtenir les raons trigonomètriques de l'angle d'un grau a partir de les quals reconstruir per recurrència les raons de tots els angles de graus enters. Però en canvi podríem procedir al càlcul de les raons trigonomètriques de l'angle de 18 graus, que és la cinquena part d'un angle recta, i que està lligat a la construcció d'un pentàgon regular. Podríem 'procedir de la següent forma:

$$\cos(18) = \sin(72) = 2 \cdot \sin(36) \cdot \cos(36) = 2 \cdot (2 \cdot \sin(18) \cdot \cos(18))(\cos^2(18) - \sin^2(18))$$

I simplificant ambdós membres per $\cos(18)$ obtindríem l'equació:

$$1 = 4\sin(18)(1 - 2\sin^2(18)).$$

Ara, anomenant mitjançant x la incògnita que cerquem, sin(18), obtenim l'equació de tercer grau:

$$1 = 4x(1 - 2x^2); \quad \text{equivalent a} \quad 8x^3 - 4x + 1 = 0.$$

Que té la solució trivial $x = 1/2$. Traient del polinomi el factor $(x - 1/2)$ obtenim el polinomi de segon grau següent: $8x^2 + 4x - 2$, que té per arrel positiva:

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

valor que correspon exactament al sinus de l'angle de 18 graus. Fem de passada dues observacions. La primera és que les operacions que intervenen per calcular el valor corresponen a les quatre operacions aritmètiques més l'arrel quadrada, la qual cosa indica que és possible construir geomètricament aquest valor com a segment, mitjançant l'us exclusiu del regle i el compàs que era l'univers geomètric on se sentien a gust els grecs. La segona observació és que el càlcul del sinus de 18 graus és exacte, és a dir, que a efectes pràctics el podem aproximar tant com vulguem segons ens convingui a l'hora de donar una exactitud prefixada d'antuvi a les taules.

Ara que disposem del càlcul exacte de les raons trigonomètriques dels angles de 15 i 18 graus, ningú ens impedeix de calcular el sinus de l'angle de 3 graus, emprant la fórmula de la diferència. Si ho féssim, i després de molt de càlcul i simplificacions arribaríem al resultat exacte següent:

$$sin(3) = -\sqrt{\frac{3\sqrt{5}}{64} + \frac{15}{64}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{64} + \frac{5}{64}} + \frac{\sqrt{30}}{16} + \frac{\sqrt{10}}{16} - \frac{\sqrt{6}}{16} - \frac{\sqrt{2}}{16}.$$

Resultat que pot semblar aparatós, però que és precís i exacte. El valor aproximat seria $0'05233595624...$.

Però arribats aquí, ens apareix un problema formidable, què hem de fer per arribar a calcular el sinus d'un grau, partint del fet que sabem el valor del sinus de 3 graus? I aquest no és un problema qualsevol, sinó que és d'aquells problemes especials que configuren la construcció de les futures matemàtiques, ens estem referint a un dels tres grans problemes que van quedar plantejats però sense resoldre pels grecs. Estem parlant del problema de la trisecció de l'angle, mitjançant l'us del regle i el compàs. Ara sabem que el problema no és resoluble, però va inspirar una infinitat de construccions de corbes, molt útils en els estudis dels renaixentistes, i pel propi desenvolupament de la geometria grega. El cas és que mai no es trobaria un valor "exacte"pel sinus d'un grau, i el problema de confegir les taules de grau en grau s'abordaria mitjançant algorismes d'aproximació. Els grecs havien arribat a descobrir que la forma d'obtenir la trisecció de l'angle passava per la intersecció de dues hipèrboles, qüestió que requeria quelcom més que el regla i el compàs. De fet analíticament el problema subjacent consistia en resoldre una equació cúbica determinada.

Les fórmules de Cardano

No seria fins a principis del segle XVI quan per primera vegada es va començar a trencar el mur impenetrable de la resolució algebraica de les equacions cúbiques, i quan es va fer les matemàtiques van rebre un nou impuls que va coincidir en un canvi de paradigme. Sembla a ser que el primer que va trobar una forma concreta de resoldre un determinat tipus d'equació cúbica fou un tal Scipione del Ferro, el qual va transmetre la troballa a un deixeble seu, Antonio Maria Fiore, però no seria fins uns quants anys més tard quan Tartaglia posa en solfa el problema i dona a conèixer la forma de resoldre dos tipus d'equacions cúbiques. Entretant Girolamo Cardano es fa amb la resolució donada per Tartaglia i amplia la resolució a tots els altres casos possibles, donant a conèixer els resultats ben estructurats a un dels llibres de l'*Ars Magna* del 1545. En Tartaglia publica els *Quesiti et inventione diverse* un any després. Tot això va donar lloc a una disputa de prioritats que es va dirimir mitjançant una sèrie de duels intel·lectuals consistents en proposar-se problemes difícils de resoldre.

Anem a veure la forma que tenen les fórmules de Cardano que resolen les equacions cúbiques. Si tenim una equació cúbica qualsevol, fent un canvi de variable lineal sempre podem aconseguir fer desaparèixer el terme de grau segon de l'equació i arribar a una equació del tipus següent:

$$x^3 + ax = N$$

On a i N són nombres reals qualsevols. Hem de tenir present que en l'època del Cardano els nombres negatius no tenien cap sentit real, i en conseqüència es tenien que tractar separadament tots els casos d'equacions cúbiques de manera que tots els termes de l'equació sempre fossin positius. Nogensmenys les fórmules de Cardano que ara exposarem seran vàlides per qualsevol valor dels paràmetres, incloent el signe corresponent. Així la solució proporcionada per la fórmula de Cardano és:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{N}{2}\right)^2} + \frac{N}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{N}{2}\right)^2} - \frac{N}{2}}$$

En el cas que $\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{N}{2}\right)^2 > 0$, llavors la fórmula de Cardano proporciona una solució real positiva, i estem en el cas que les altres dues rels són complexes conjugades. En aquella època només es preocupaven de trobar solucions positives, i les altres no tenien consistència per a ells. En el cas contrari que el terme englobat per l'arrel quadrada fos negatiu llavors la fórmula no proporcionava cap solució real, però en canvi ells sabien que hi havia solució real positiva, i de vegades fins i tot dues solucions positives, però que no es podien trobar mitjançant la fórmula de Cardano. Ara sabem que hi ha tres solucions reals que sumades donen zero, conseqüència de no haver terme de segon grau a l'equació cúbica.

No deixava de ser curiós pels matemàtics italians que la fórmula no funcionés precisament en alguns casos que hi havien dues solucions positives, i en canvi funcionés quan només hi havia una. Aquesta aparent paradoxa no es resoldria fins al cap d'uns quants anys anys, quan Vieta va posar en clar la relació entre les diverses equacions i les seves arrels, explicant la forma d'abordar la situació des d'una perspectiva algebraica i geomètrica molt superior. Es va resoldre el problema de forma definitiva, tot i que encara no s'admitien les arrels complexes, ni les negatives. Però abans d'acabar aquest apartat anem a aplicar la fórmula de Cardano a la cúbica que resulta del problema de la trisecció de l'angle.

La trisecció de l'angle

El problema de la trisecció de l'angle, traduït al context de les raons trigonomètriques consisteix en trobar la relació entre el sinus d'un angle qualsevol i el sinus de l'angle tres vegades més gran, i concretament el problema consisteix en calcular el valor del primer sabent el valor del sinus de l'angle triple. Veiem les relacions que s'estableixen i la cúbica que governa aquesta qüestió:

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin(\alpha)\cos(2\alpha) + \cos(\alpha)\sin(2\alpha) = \\ = \sin(\alpha)\left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right) + \cos(\alpha)\cdot 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \\ = \sin(\alpha)\left(1 - 2\sin^2(\alpha)\right) + 2\sin(\alpha)\left(1 - \sin^2(\alpha)\right) = -4\sin^3(\alpha) + 3\sin(\alpha). \end{aligned}$$

Si ara posem $\sin(\alpha) = x$, tenim l'equació:

$$4x^3 - 3x + \sin(3\alpha) = 0, \qquad \text{o l'equivalent} \quad x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{\sin(3\alpha)}{4} = 0.$$

Si ara intentem aplicar a aquesta cúbica la fórmula de Cardano veurem que el terme afectat per l'arrel quadrada ens dona el següent:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{\sin(3\alpha)}{8}\right)^2 \leq 0.$$

Efectivament aquest terme és sempre negatiu per qualsevol valor de l'angle α, llevat del cas extrem que $\sin(3\alpha) = 1$, on llavors el terme és zero. Seria el cas que l'angle 3α fos de 90 graus, i llavors les fórmules de Cardano ens proporcionarien una solució real negativa:

$$x = \sqrt[3]{0 - \frac{1}{8}} - \sqrt[3]{0 + \frac{1}{8}} = -1.$$

Tenint aquesta rel, l'equació cúbica descompondria així:

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

On efectivament apareix com arrel doble el sinus de la trisecció de l'angle de 90 graus, tal com efectivament tenia que aparèixer. Però només en aquest cas extrem podem aplicar les fórmules de Cardano a la cúbica que dona la trisecció de l'angle.

Petita reflexió final

Reflexionant sobre aquesta petita part de les matemàtiques ens donem compta que els grecs ja havien descobert que per trobar un valor precís de sinus d'un grau a partir del valor de sinus de 3 graus era necessari resoldre una equació de tercer grau, qüestió que va quedar sense resoldre gairebé durant 2000 anys, i quan arriba el moment que es disposa de les fórmules de Cardano per a poder resoldre les equacions cúbiques llavors dona la mala coincidència que les fórmules no són aplicables a la cúbica que dona la trisecció de l'angle. A això se li podria dir tenir mala sort!!! després d'esperar 2000 anys i quedar-se amb un pam de nas.... Però no es va tenir mala sort del tot, ja que en definitiva seria bo que les fórmules de Cardano no resolessin totes les cúbiques, així els matemàtics tindrien sobrada ocasió de seguir donant voltes a la qüestió, i d'aquesta manera Vieta cap a finals del segle XVI va posar completament en clar la qüestió en la seva obra *De aequationem et recognitionem. Tractatus duo.* Allí tracta de forma general totes les transformacions a que es pot sotmetre una equació polinòmica i les relacions que s'estableixen entre les arrels i els coeficients. També tracta el problema de les solucions de les diferents equacions fins el grau quart.

Vieta demostra que totes les equacions cúbiques a les quals no es pot aplicar la fórmula de Cardano corresponen a equacions per les quals es pot dibuixar un model geomètric corresponent a la trisecció d'un angle donat. Per fer-ho utilitza un esquema geomètric contingut a una de les obres d'Arquimedes. D'aquesta manera planteja que mitjançant unes taules trigonomètriques es pot donar les dues solucions positives reals d'aquestes equacions que vindrien donades de la forma:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right), \quad i \quad \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right).$$

L'altra solució que correspondria a sumar a l'angle trisecat la tercera part de dues voltes enteres no l'escriu Vieta ja que el sinus donaria un valor numèric negatiu, no identificable en la geometria dels segments.

És evident que el problema de la trisecció de l'angle encara guardaria el tresor del descobriment dels nombres complexos, i que finalment es posarien en solfa totes les relacions existents entre la trigonometria, l'àlgebra i la geometria. Però això encara hauria d'esperar molts anys....