

Una aproximació històrico-metodològica a certes qüestions de geometria elemental

Dels políedres regulars al regle i el compàs
De la geometria del tàngram

Josep Pla i Carrera

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Exposat a Barcelona, el dia 30 d'octubre de 2009

Facultat d'Econòmiques
de la Universitat Pompeu Fabra

Dels políedres regulars al regle i el compàs. La geometria del tàngram

Índex

- 1 Dels políedres regulars al regle i el compàs
 - Políedres regulars. Introducció
 - Polígons regulars a EUCLIDES
 - Políedres regulars. Construcció
 - Anàlisi-síntesi de DESCARTES
- 2 La geometria del tàngram
 - El tàngram clàssic: presentació
 - El tàngram clàssic: utilitat
 - El tàngram clàssic: geometria plana
 - El tàngram generalitzat: el teorema de Pitàgores
 - Un parèntesi: els Sulbasutres indis
 - L'estomaquíó d'Arquimedes
 - El teorema de Pick

Part primera

Dels políedres regulars al regle i el compàs

Els constituents de l'univers



De la conferència
Els sòlids platònics
de la professora i
amiga PILAR BAYER.
Barcelona, 1996.

PLATÓ

Aquesta teoria dels **elements de la naturalesa** és de PLATÓ al *Timeu*.

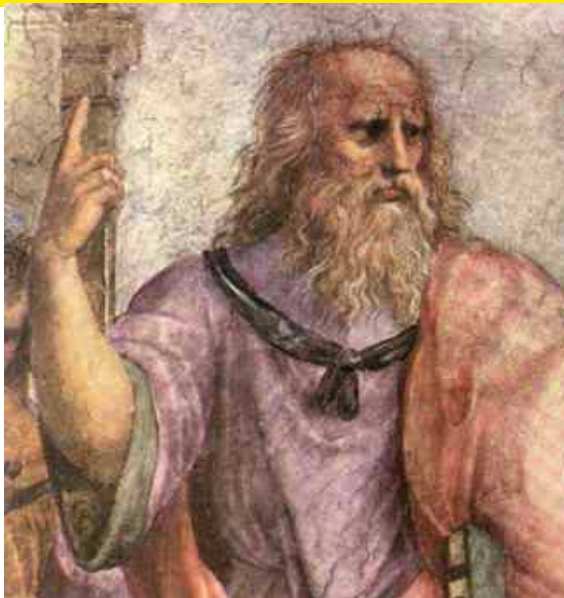
Retrat de PLATÓ a l'obra de RAFAEL, l'*Escola d'Atenes*.

La cara és un retrat de MIQUEL ÀNGEL BUONARROTI.

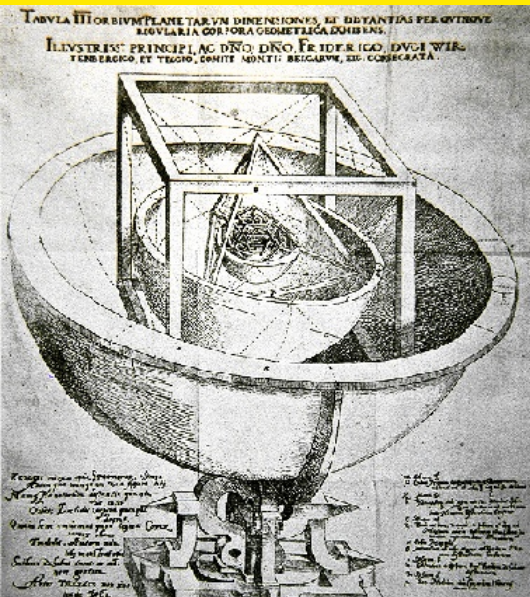
PLATÓ

Atenes, 427 aC

Atenes, 347 aC



L'estructura del cosmos segons JOHANNES KEPLER



Eminentment platònic, **JOHANNES KEPLER** estava convençut que l'univers es podia descriure geomètricament o matemàticament.

A l'obra de joventut, *Mysterium Cosmographicum* [1596] oferia aquesta construcció meravellosa, però errònia, basada en els cinc sòlids platònics.

Del fet que solament n'existeixin cinc, de sòlids platònics, solament hi podia haver sis planetes.

JOHANNES KEPLER

JOHANNES KEPLER

Weil der Stadt,
27 de desembre de 1571
Regensburg,
15 de novembre de 1630



L'estructura dels *Elements* d'EUCLIDES

L'obra d'EUCLIDES té com a objecte final la **construcció** dels **cinc** políedres regulars, amb els quals clou el llibre XIII que, al seu torn, clou els *Elements*.

Hi ha qui afirma que el títol *Elements* fa referència precisament al fet que el text tracta dels **elements** o **constituents** de l'Univers.

Els construeix tots cinc, però, a més, **demostra** que només hi ha aquests cinc.

Observa que **solament podem fer cinc políedres regulars**: amb [3, 4, o 5] triangles equilàters, amb [3] quadrats, i amb [3] pentàgons a cada vèrtex.

Tot rau, doncs, a construir aquests polígons regulars, una tasca que realitza fonamentalment al llibre IV, malgrat que la **construcció del traingle equilàter** —una eina bàsica— és la proposició I del llibre I.

EUCLIDES D'ALEXANDRIA

Representació
d'EUCLIDES a l'Escola
d'Atenes de RAFAEL.

EUCLIDES

?, ~325 aC

Alexandria, 265 aC

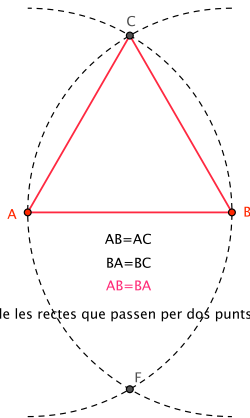


El triangle equilàter

Llibre Primer. Proposició 1.

*Donat un segment AB
fer [amb regle i com-
pàs] un triangle equilà-
ter de costat AB .*

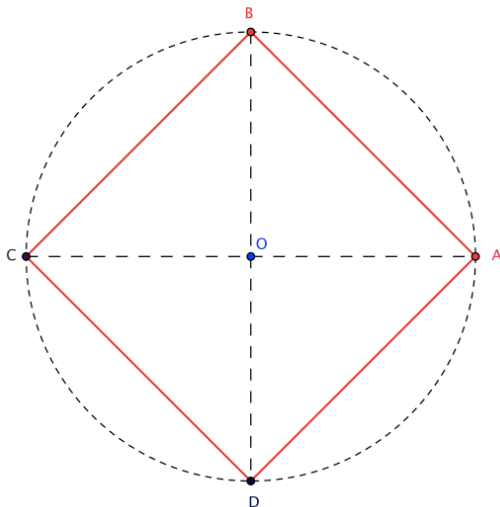
E I.1 PROBLEMA



Unicitat de les rectes que passen per dos punts com ara A i B

El quadrat

E IV 6. PROBLEMA



Llibre Quart. Proposició 6.

*Donat un segment AB
fer [amb regle i com-
pàs] un quadrat de
costat AB .*

El pentàgon regular

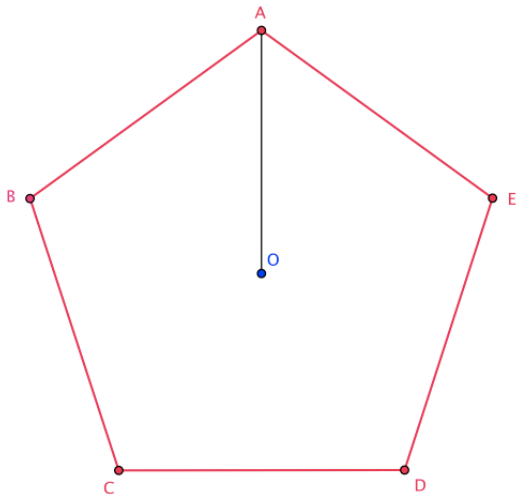
E IV 11. PROPOSICIÓ

Llibre Quart. Proposició 11.

Fer [amb regle i compàs] el pentàgon regular inscrit a una circumferència de radi OA donat i costat AB .

Per a EUCLIDES és molt més complicat. Precisa de *dues construccions prèvies*:

- un cert tipus de triangle isòscels,
- el segment auri.



Pràctica: Lectura primera

Lectura dels *Elements* d'EUCLIDES,

llibre primer, proposició 1,

llibre quart, proposicions 6, 11 i 10, i

llibre segon, proposició 11.

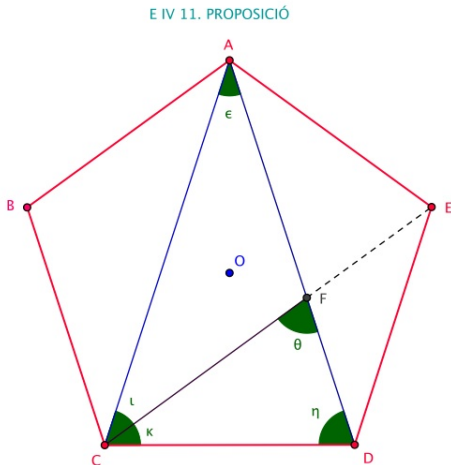
El pentàgon regular

Fem ara una mica d'**anàlisi** en el sentit grec, definit per **PAPPOS D'ALEXANDRIA** [~290-~350].

L'**anàlisi grega** consisteix a considerar el problema **ja resolt** i a veure què en podem deduir que sigui **útil per a construir-lo**.

Tirem tres diagonals i analitzem els triangles que es generen.

Observem alguns fets realment interessants.



$$\zeta = \eta, \eta = \theta, \epsilon = \iota, \iota = \kappa, \text{ i } \zeta = 2\iota$$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DF} \quad \text{O sigui} \quad \frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FD}$$

Un cert tipus de triangle isòscels

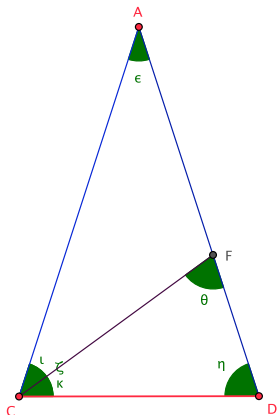
Llibre Quart. Proposició 10.

És possible fer [amb regle i compàs] un triangle isòscels que tingui els angles a la base dobles que l'angle en vèrtex.

Li cal acceptar la possibilitat de dividir, amb regle i compàs, un segment donat AB , en **raó mitjana i extrema**. És a dir, li cal **poder construir el segment auri**.

De moment, ho acceptarem.

E IV 10. PROPOSICIÓ



$$\zeta = \eta, \eta = \theta, \epsilon = \iota, \iota = \kappa, \text{ i } \zeta = 2\epsilon$$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DF} \quad \text{O sigui} \quad \frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FD}$$

La construcció del triangle isòscels de la proposició 10 del llibre IV és sofisticada.

EUCLIDES usa la divisió àuria del segment AB .

Amb centre A i radi AB fa un arc de circumferència.

Hi tira la corda $BC = AF$.

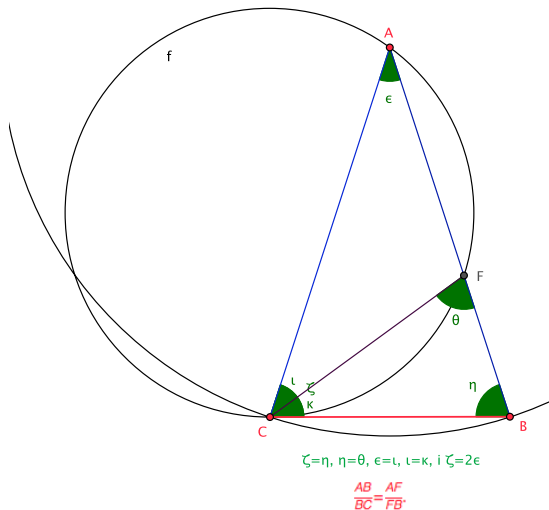
Ara fa la circumferència f que passa pels punts A, F i C .

Per potència del punt B a la circumferència f , $BC^2 = BF \times BA$:

BC és tangent a f en C .

Això li permet establir que l'angle en A és la meitat que l'angle en B .

E IV 10. PROPOSICIÓ



El rectangle auri

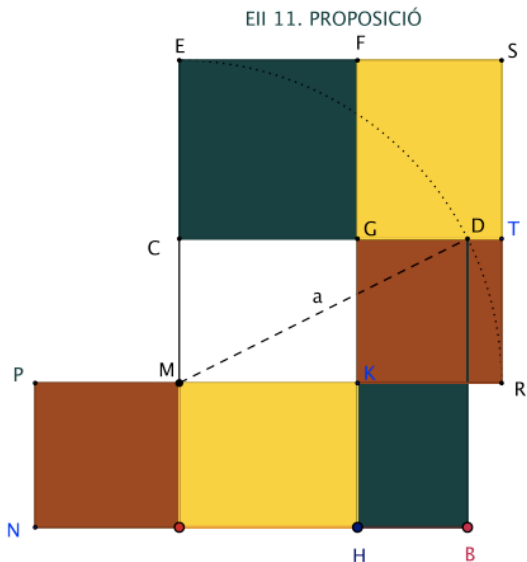
Pel teorema de Pitàgores

$$MD^2 = AB^2 + MA^2,$$

que descompon en quatre parts: PA , AK , MG , BG .

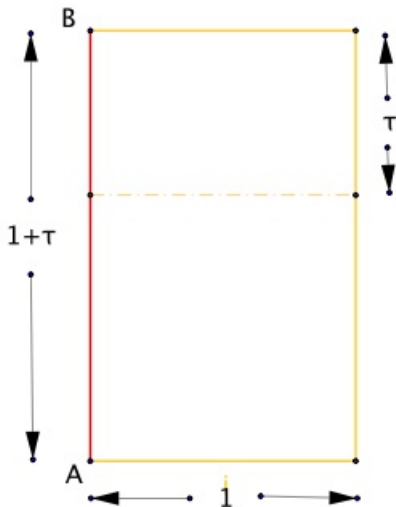
Però $MD^2 = ME^2$,
que descompon en quatre parts: $KT = PA$,
 $FT = AK$, MG , EG .

I això acaba la demostració.



L'icosàedre segons LUCA PACIOLI

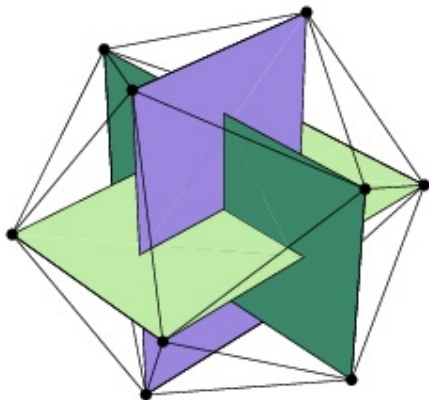
Amb tot això hem vist la importància del **rectangle auri**. A més, és tància del **iteratiu**.



L'icosàedre segons LUCA PACIOLI

LUCA PACIOLI al text *De Divina Proportione* [1509]
—un text magnífic que conté els políedres regulars dibuixats per LEONARDO DA VINCI— ofereix la següent construcció de l'icosàedre regular.

Se'n dedueix amb molta facilitat la construcció del **dodecàedre regular**.



LUCA PACIOLI

A *De Divina Proportione* ofereix la construcció dels políedres regulars.

LUCA PACIOLI

San Sepolcro, 1445
San Sepolcro, 1517



LEONARDO DA VINCI

LEONARDO va dissenyar amb una enorme elegància els políedres regulars i esterllats de *De Divina Proportione* [1509] de LUCA PACIOLI.

Aquest dibuix és un autoretrat.

LEONARDO DA VINCI

Vinci, 15 d'abril de 1452
Cloux (Amboise),
2 de maig de 1519



Pràctica: Lectura segona

Lectura de la *Géométrie* de DESCARTES,

Llibre primer, les cinc o sis primeres pàgines.

Anàlisi-síntesi de RENÉ DESCARTES

Com és ben sabut de tots, DESCARTES a la *Géométrie*—seguint els passos de FRANÇOIS VIÈTE [Fontenay-le-Comte, 1540-París, 1603]—que, al seu torn, havia algebraitzat l'anàlisi-síntesi de PAPPUS D'ALEXANDRIA—ofereix una manera nova de reduir els problemes geomètrics a l'art nova.

Al llibre primer esbrina què diu aquesta art en relació amb la possibilitat de resoldre el problema geomètric amb regle i compàs.

És una reducció de la geometria a l'àlgebra.

Anàlisi-síntesi de RENÉ DESCARTES

RENÉ DESCARTES

La Haye, avui Descartes,
31 de març de 1596
Estocolm,
11 de febrer de 1650



Anàlisi-síntesi de RENÉ DESCARTES

Donats segments de longituds a i b , i el segment unitat 1 , podem calcular, amb regle i compàs, els segments:

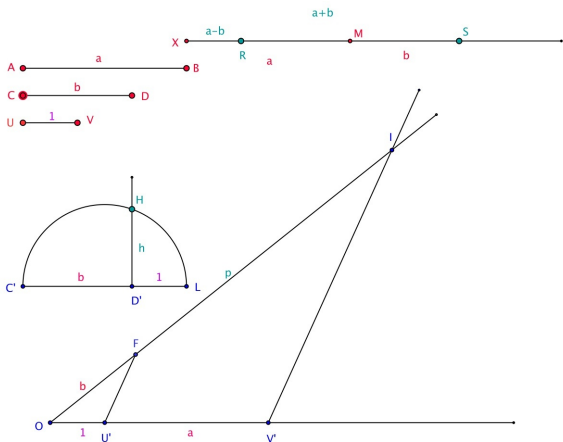
suma: $s = a + b$,

resta: $r = a - b$,

producte: $p = a \cdot b$,

quocient: $q = a \div b$,

arrel quadrada: $h = \sqrt{a}$.



Anàlisi-síntesi de RENÉ DESCARTES

En resulta que tota equació de segon grau

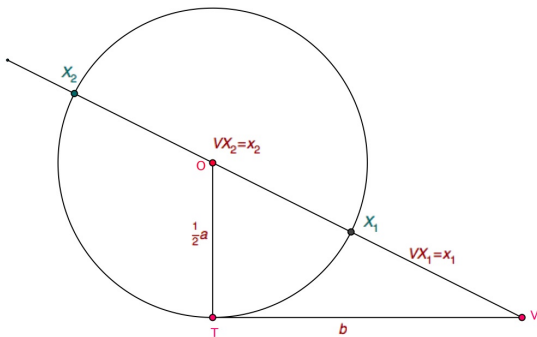
$$ax^2 + bx + c = 0,$$

en el supòsit que els coeficients són les longituds de segments donats o construïts per endavant, **resulta que és possible construir, amb regle i compàs, un segment la longitud del qual sigui la solució de l'equació quadràtica, en el benentès que sigui real.**

$$x^2 + ax = x(x+a) = b^2$$

$$x_1 = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$$

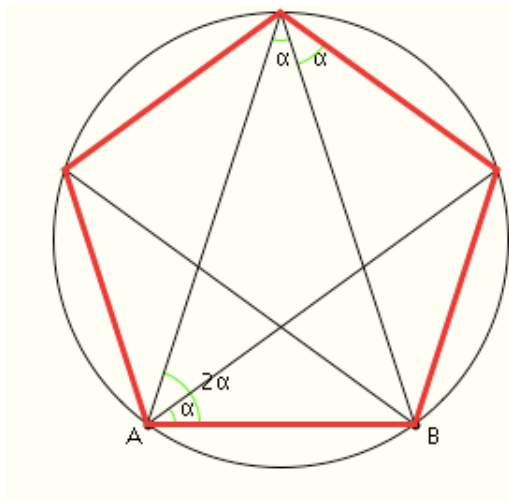
$$x_2 = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}a$$



Anàlisi-síntesi cartesiana del pentàgon regular

L'anàlisi del pentàgon regular porta de forma natural al segment auri i també al triangle isòscels descrit i construït abans.

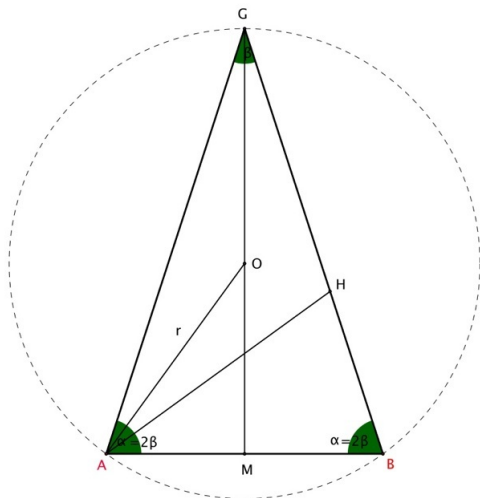
És un bon exercici matemàtic —algú, potser, diria didàctic, però jo prefereixo dir metodològic— usar de l'anàlisi per comprendre el comportament del problema abans de resoldre'l.



Anàlisi-síntesi del pentàgon regular

De l'anàlisi geomètrica del pentàgon regular podem passar de forma natural —o com diria DESCARTES, “seguint la dificultat del problema”, a la síntesi algèbrica.

També és un bon exercici matemàtic, però ara de traducció de llenguatges.



Anàlisi-síntesi del pentàgon regular

$$GH = \frac{\sqrt{5}-1}{2} GB$$

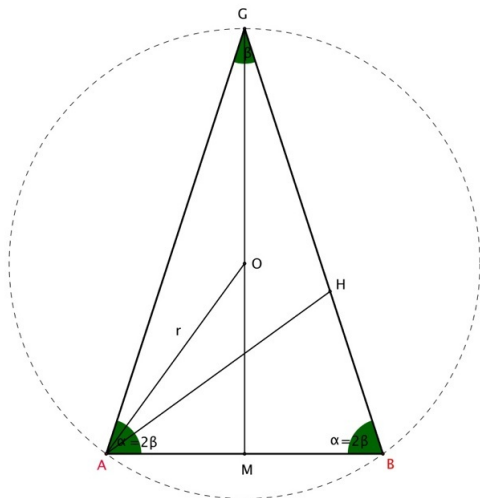
(segment auri),

$$GH = HA = AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} GB,$$

$$AM = \frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}-1}{4} GB =$$

$$= k x,$$

$$\text{on } k = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ i } GB = x.$$



Anàlisi-síntesi del pentàgon regular

$$GH = \frac{\sqrt{5}-1}{2} GB \text{ (segment auri),}$$

$$GH = HA = AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} GB,$$

$$AM = \frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}-1}{4} GB = kx,$$

$$\text{on } k = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ i } GB = x.$$

Però,

$$AM^2 + MG^2 = AG^2 = BG^2.$$

$$\text{D'on: } k^2 x^2 + (r + OM)^2 = x^2,$$

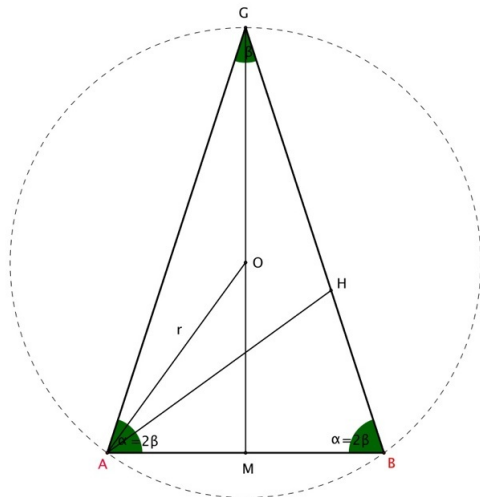
$$\text{i calculant: } OM = \frac{x^2 - 2r^2}{2r}.$$

$$OM^2 = r^2 - AM^2 = r^2 - k^2 x^2 (*).$$

Susbtituïm OM a (*) i obtenim:

$$x^4 = 4r^2(1 - k^2)x^2.$$

$$\text{D'on: } x^2 = \frac{(5+\sqrt{5})}{2}.$$



Construïble amb regle i compàs.

Pràctica: El pentàgon

Exercici pràctic primer

- Com faries, amb regle i compàs, un pentàgon regular?
Fes-ho i demostra-ho.
- Com faries, amb papiroflèxia, un pentàgon regular?
Fes-ho i demostra-ho.

Part segona

La geometria del tàngram

La geometria del tàngram

De forma esporàdica he indicat que **EUCLIDES** feia demostracions pel **mètode del tàngram**.

Ara és el moment de aprofundir aquesta idea i ho farem recordant què és el tàngram clàssic i analitzant les seves possibilitats més enllà del tàngram pròpiament dit.

El tàngram. Presentació

El tàngram (xinès 巧板, pinyin (abreujament de Hanyu Pinyin, lletreig pels sons de l'idioma Han): qī qiǎo bǎn; joc dels set elements o taula de la saviesa) és un joc xinès molt antic (740-300 aC). Consisteix a fer figures planes—o siluetes de figures, si es preferix—amb la totalitat d'una sèrie de peces donades. Les 7 peces—tans—juntades formen un quadrat i són:

- 5 triangles rectangles isòscel·les de mides diverses, (2 de grans, un de mitjà, i dos de petits) cada un dels quals té, com a costat, la diagonal del més petit,
- 1 quadrat,
- 1 paralel·logram de tipus romboidal.

Aquest és el tàngram clàssic, si bé hi ha diverses variants, com ara el tàngram de vuit peces, el rus de dotze peces, el de Fletcher, de set peces, etc.

El tàngram. Presentació

Hi ha versions diverses sobre l'origen de la paraula **tàngram**, una de les més acceptades és la que explica que la paraula l'inventà un anglès unint el vocable cantonès **tang**, que significa xinès, amb el vocable llatí **gram**, que significa escrit o gràfic.

Una altra versió narra que l'origen del joc es remunta als anys **618** al **907 dC**, època durant la qual regnà a **Xina** la dinastia **Tang** de la qual es derivaria el nom. Si aquesta afirmació fos certa, el joc seria molt recent.

El tàngram. Presentació

En definitiva, no sabem amb certesa qui va inventar el joc ni exactament quan, ja que, com és ben sabut, els coneixements xinesos no arribaren a Occident fins que el jesuïtes—i, en particular, **MATEO RICCI**—no van descobrir la riquesa dels coneixements científics xinesos.

Però les primeres publicacions xineses en les quals apareix el joc són del segle **XVIII**, una època en la qual el joc ja era conegut en d'altres indrets del món.

A **Xina**, el tàngram era molt popular però se'l considerava un joc de tipus infantil.

Recordem que, a **Europa**, els primers llibres que tracten el tàngram xinès són de 1813, on despertà un gran entusiasme. Se l'anomenà el **trencaclosques xinès** i esdevingué molt popular. Hi jugaven els nens i els adults, persones amb cultura i persones menys preparades culturalment.

MATTEO RICCI

MATTEO RICCI

Macerata (Estats Papals, Itàlia),
6 d'octubre de 1552

Pequín, 11 de maig de 1610



El tàngram. Presentació

Sembla que, durant l'exili a l'illa de Santa Helena, **NAPOLEÓ BONA-PARTE** es convertí en un especialista de molt novell d'aquest joc.

Pel que fa al nombre de figures que hom pot fer amb el tàngram xinès, la majoria de llibres europeus van copiar les figures xineses originals que era d'**alguns centenars**.

En 1900 s'havien inventat figures i formes geomètriques noves i es disposava d'**aproximadament 900**.

Actualment es coneixen al voltant de **16.000 figures diferents**.

NAPOLEÓ BONAPARTE

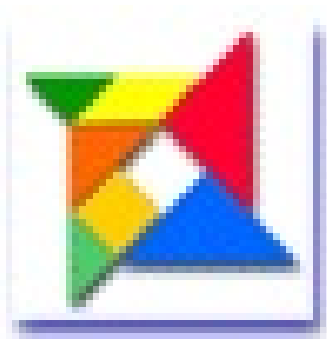
NAPOLEÓ BONAPARTE

Ajaccio, Còrcega,
15 de setembre de 1769

Santa Elena, 5 de maig de 1821



El tàngram. Representació

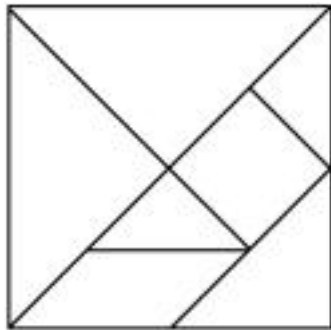


Pràctica: El tàngram xinès clàssic

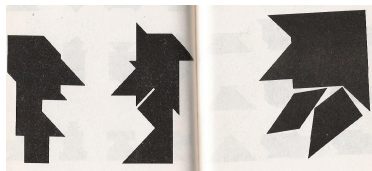
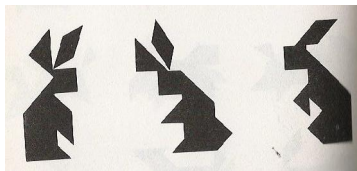
Exercici pràctic segon

- Fem un tàngram xinès clàssic amb una cartulina i unes tisores.
- Guardem-lo, en un quadrat, i en dos quadrats.
Quin teorema —particular i elemental— hem demostrat?

El tàngram. Representació



Algunes construccions amb tàngram: conills i cares



Pràctica: Conills i cares

Exercici pràctic tercer

- Fer els conills —almenys un.
- Fer les cares —almenys una.

Un entreteniment lúdic: números i lletres



El tàngram clàssic: utilitat

No és només un entreteniment, sinó que s'usa en psicologia, en dissenys, en filosofia i, molt particularment, en **pedagogia**.

En l'àmbit de l'**ensenyament de la matemàtica**, el tàngram s'usa per introduir conceptes de geometria plana, i per promoure el desenvolupament de les capacitats psicomotrius i intel·lectuals dels al·lots i al·lots perquè permet lligar de manera lúdica la manipulació concreta de materials amb la formació d'idees abstractes.

El tàngram clàssic: utilitat

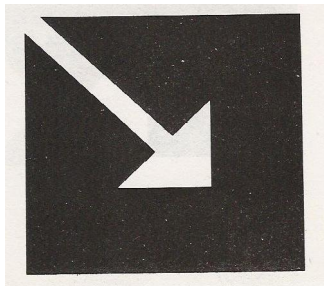
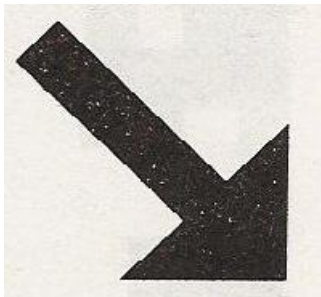
Com a curiositat val la pena mencionar un article publicat l'any 1817 per M. Williams, titulat *New Mathematical Demonstrations of Euclid rendered clear and familiar to the minds of youth, with no other mathematical instruments than the triangular pieces, commonly called the chinees puzzle* [*Demostracions matemàtiques d'Euclides noves, explicades, de forma clara i familiar per a les ments joves, sense altre eines que peces triangulars, que comunament reben el nom de puzle xinès*].

És amb aquest esperit que nosaltres ara dedicarem una mica d'atenció a la manera de demostrar que podem anomenar, per generalització, **demostracions pel mètode generalitzat del tàngram**.

El tàngram clàssic i la geometria

El tàngram és un joc excel·lent per **mostrar** com figures amb formes ben diverses tenen, tanmateix, la mateixa superfície perquè estan fetes de les mateixes peces.

Per exemple, la fletxa i el quadrat sense la fletxa.



El tàngram clàssic i la geometria

Ara podem respondre la pregunta de l'exercici pràctic segon.

Aquest és un mètode, molt didàctic i intuïtiu, per veure que la diagonal d'un quadrat proporciona el costat d'un quadrat que té la superfície doble de l'inicial.

Considerem les **set** peces del tàngram disposades de la forma:



Obtenim dos quadrats de la mateixa superfície.

El tàngram clàssic i la geometria

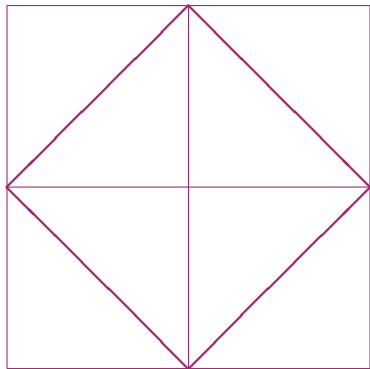
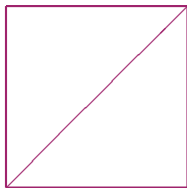
Hem format dos quadrats de la mateixa superfície. Ara bé, **ambdós junts** tenen la superfície del quadrat, perquè consta de les mateixes **set** peces que els dos anteriors:



Hem demostrat un cas particular del **teorema de Pitàgores**.

El tàngram clàssic i la geometria

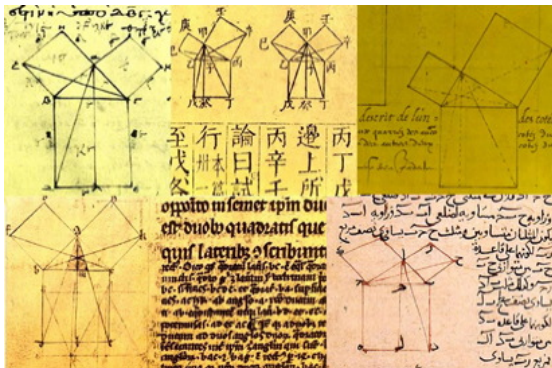
Certament, hi ha una demostració encara més senzilla d'aquest fet —la que exposa **PLATÓ** en el *Menó*, però això **no invalida la validesa** del mètode tàngram. En absolut, perquè també és una demostració de tipus tàngram, però molt més simple:



Pràctica: Lectura tercera

Lectura dels *Elements* d'**EUCLIDES**,
llibre primer, proposició 47.

Il·lustracions del teorema 47 del llibre primer



- 1 Manuscrit grec (segle XII, Biblioteca Nacional de París).
- 2 Manuscrit xinès (segle XVII).
- 3 Manuscrit francès (segle XV).
- 4 Traducció de l'àrab al llatí d'ADELARD DE BATH del 1142.
- 5 Pàgina d'un comentari àrab del 1250 sobre Euclides.

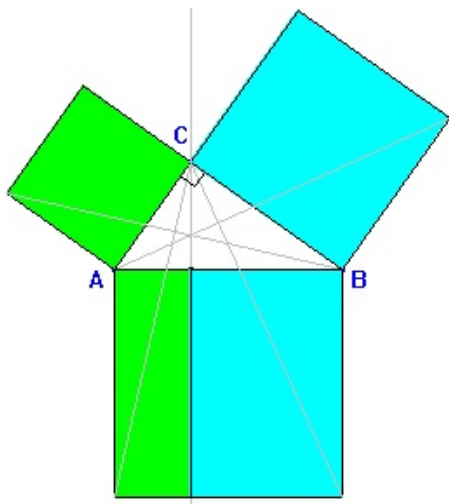
La geometria tàngram als *Elements*

▶ pitagores 2

La demostració que fa **EUCLIDES** a la **proposició 47** del *llibre primer* dels *Elements* és una demostració per **tàngram generalitzat** en el sentit de descompondre el quadrat damunt de la hipotenusa en **dos rectangles**, cada un dels quals **és igual a un dels quadrats** que s'ha construït damunt de cada un dels catets.

Observem la figura que hi ha als *Elements* i apliquem **tàngram generalitzat**.

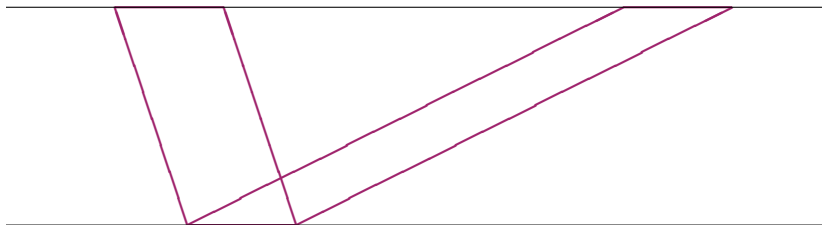
Calen teoremes prèvis.



La geometria tàngram als *Elements*

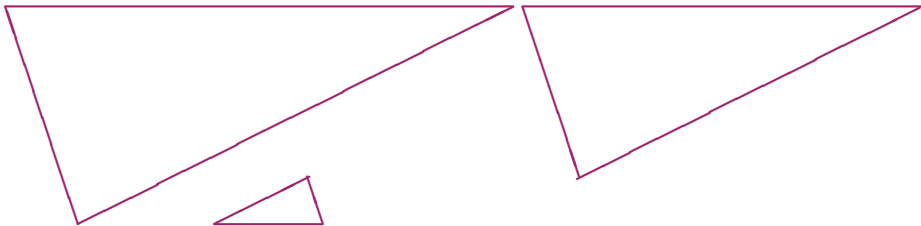
Euclides, a la proposició 35 del llibre I dels *Elements*, estableix:

Proposició 35. *Dos paral·lelograms, que tenen la mateixa base i el costat paral·lel a la base en una mateixa recta paral·lela a la recta que conté la base comuna, tenen la mateixa superfície.*



La geometria tàngram als *Elements*

El que interessa observar d'aquesta demostració és que està feta usant el mètode del tàngram, usant tres peces ben distingides.



La geometria tàngram als *Elements*

La demostració és ben senzilla, si acceptem el teorema establert a la **proposició 4** del llibre primer dels *Elements* d'**EUCLIDES** segons el qual

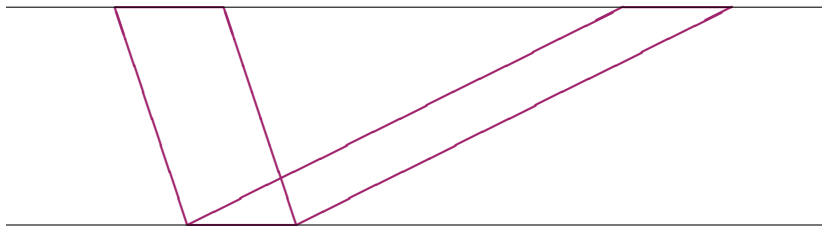
Dos triangles amb dos costants i l'angle que formen congrus són congrus.

Per poder-ho establir cal que els **angles corresponents** siguin iguals. Això s'estableix a la **proposició 29** del llibre primer dels *Elements* d'**EUCLIDES**.

És un resultat que **depèn** del **postulat de les parel·leles**.

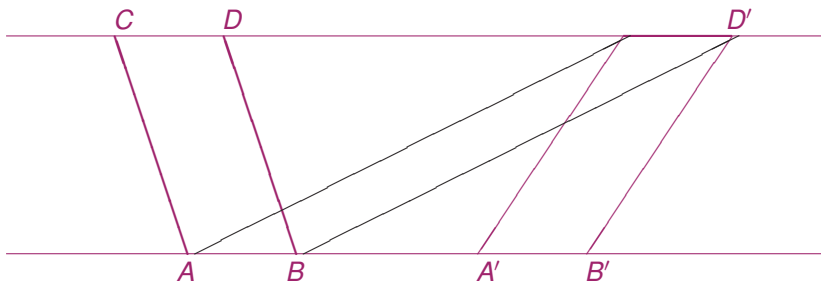
La geometria tàngram als *Elements*

Ara tot és a punt i és senzill. Només cal observar les peces que formen els paral·lograms amb relació amb les peces que formen els triangles congrus.



La geometria tàngram als *Elements*

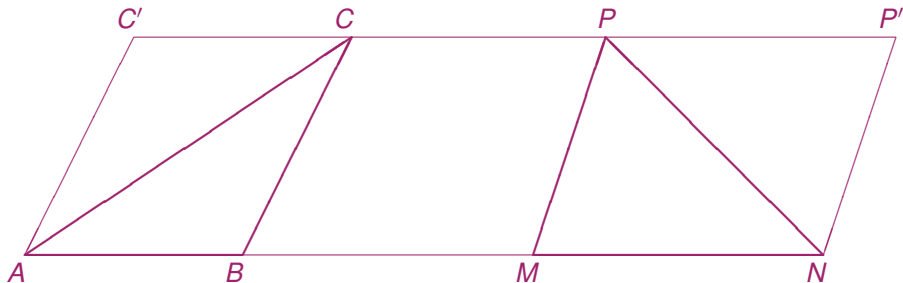
Usant el fet que dues coses iguals a una tercera són iguals entre si el teorema anterior, es pot generalitzar quan els paral·lelograms tenen bases còngrues damunt d'una una recta i els costats oposats a les bases en una paral·lela.



La geometria tàngram als *Elements*

Un altre corol·lari és el que permet d'establir que dos triangles amb **bases còngrues** damunt d'una recta i vèrtexs en una recta paral·lela a la que conté les bases tenen la mateixa superfície.

Això és deguda al fet—demostrable amb tàngram—que un triangle té una àrea que és igual a la meitat del paral·lògram—obtingut per tàngram—unint dues peces iguals al triangle



EUCLIDES D'ALEXANDRIA

EUCLIDES

?, ~325 aC

Alexandria, 265 aC



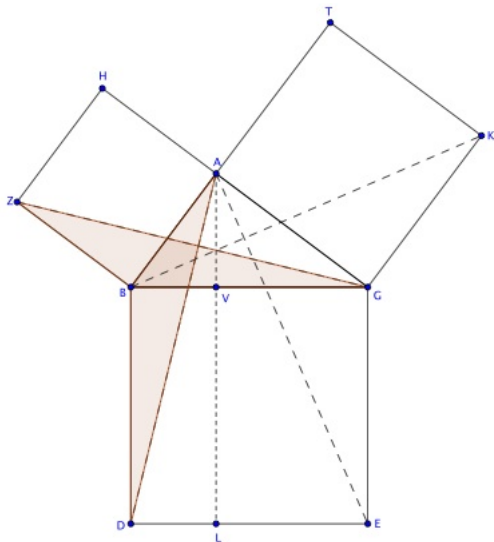
La geometria tàngram als *Elements*

El quadrat BE es compon dels rectangles BL i LG . El rectangle BL és igual a dues vegades el triangle $\triangle ABD$ que, al seu torn, és igual al triangle $\triangle ZBG$. Però aquest triangle és igual a la meitat del quadrat BH .

Anàlogament amb el rectangle LG , els triangles $\triangle AGE$, $\triangle KGB$ i el quadrat AK .

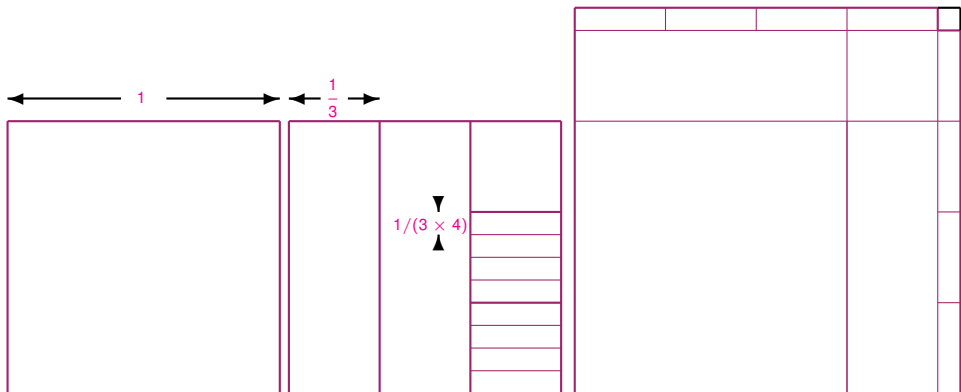
Quina demostració més elegant per tàngram generalitzat!

▶ pitagores 1



Un parèntesi: els *Sulbasutres* indis

Una demostració, basada en el tàngram, però que, després va una mica més lluny, és la que ofereix l'autor dels *Sulbasutres* [1500-800 aC] quan proporciona la demostració següent del càlcul del valor de $\sqrt{2}$:

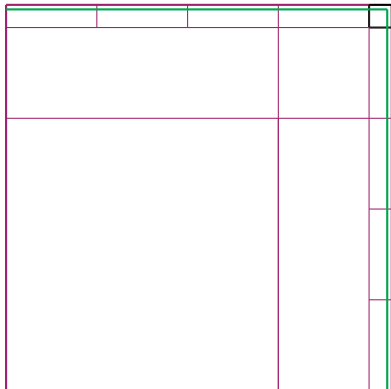


Un parèntesi: els *Sulbasutres* indis

El mètode del tàngram proporciona una figura que gairebé és el quadrat de $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4}$, però no exactament perquè falta la peça necessària per cobrir el **quadradet negre** del costat superior dret.

Això l'obliga a fer una **petita correcció** —que caldrà calcular d'alguna manera i que nosaltres indiquem amb el quadrat de **costat verd**.

L'autor agafa solament la **part lineal** i omet la part quadràtica.



Pràctica: *Sulbasutres*

Exercici pràctic quart

- Planteja l'equació de segon grau que cal resoldre.
- Omet la part quadràtica.
- Dóna el valor aproximat de $\sqrt{2}$.

Ha de donar $\sqrt{2} \simeq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34} \sim 1,41911$.

▶ saltar-se la solució

Un parèntesi: els *Sulbasutres* indis

El costat del quadrat val $a = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - x$, i cal determinar el valor x de manera que l'àrea del quadrat de costat verd a sigui exactament igual a 2. Cal, doncs, que $a^2 = 2$. Elevem al quadrat. És a dir,

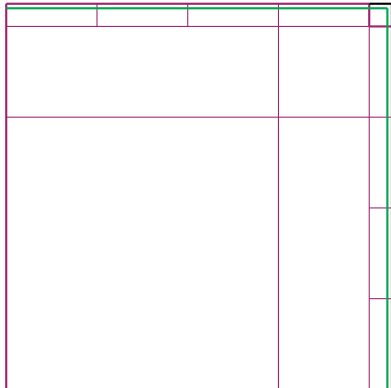
$$2 = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4}\right)x + x^2.$$

Eliminem el terme quadràtic
i operem. Aleshores

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4}\right)^2}{2 \times \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4}\right)} = \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34}. \end{aligned}$$

En resulta, doncs, que

$$\sqrt{2} \simeq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34} \sim 1,41911.$$



L'estomaquíó d'ARQUIMEDES

De l'*Estomaquíó* [$\Sigma\tau\omicron\mu\acute{\omicron}\chi\iota\omicron\nu$] o *Luculus* solament se'n coneixen els fragments àrabs estudiats per l'orientalista suís **Heinrich Suter**, i els fragments que conté el famós **palimpsest de Jerusalem**, trobat per l'erudit **Papadopulos Kerameus** en el monastir del Sant Sepulcre del patriarcat de Jerusalem.

Recordem, de passada, que fou **Johan Ludwig Heiberg** el primer a sospitar que es tractava d'un text que contenia el *Mètode*, una obra que es considerava perduda i de la qual solament se'n tenia una al·lusió que **Suidas** havia fet a un comentari de **Teodosi**. Per aquesta raó, en 1906, es traslladà a Constantinoble amb la intenció d'examinar el manuscrit, i aconseguí de llegir-ho gairebé del tot.

L'any 1907 publicà el resultat de les seves investigacions i el text grec. Immediatament en féu una traducció en alemany que fou anotada **Hierònimus Zeuthen**.

ARQUIMEDES

ARQUIMEDES

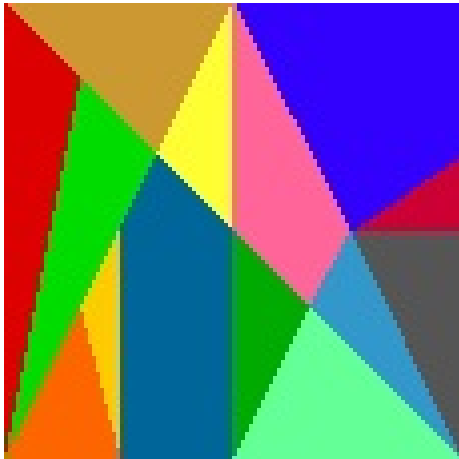
Siracusa, 287 aC

Siracusa, 212 aC

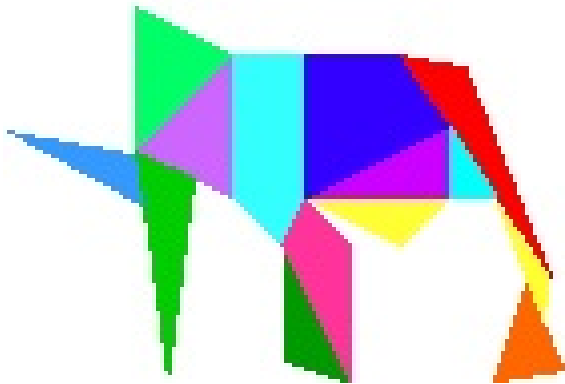


L'estomaquíó d'ARQUIMEDES

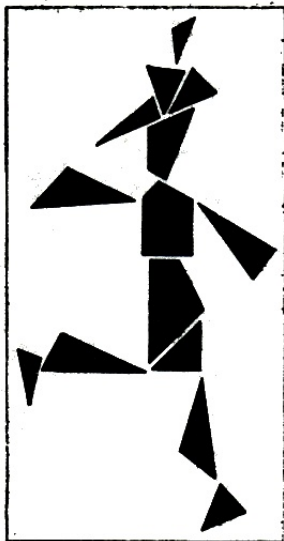
Sembla que hi ha **17 152** formes diferents de guardar les fitxes de l' en un quadrat.



L'estomaquíó d'ARQUIMEDES: l'elefant



L'estomaquíó d'ARQUIMEDES: el dansarí



L'estomaquíó d'ARQUIMEDES: arlequins



El teorema de Pick

Acabarem amb el **teorema de Pick**, establert per **GEORG ALEXANDER PICK**, l'any 1899.

És un teorema relatiu a la superfície de les **figures poligonals reticulars**. És a dir, que tenen els vèrtex en els punts d'una quadrícula feta amb quadrats unitat.

És una simple fórmula que diu

$$\text{Area} = I + \frac{1}{2}V - 1,$$

on

I = nombre de punts reticulars interiors al polígon (●)

V = nombre de punts reticulars de la vora del polígon (●).

GEORG ALEXANDER PICK

GEORG ALEXANDER PICK

Viena, 10 d'agost de 1859
Theresienstadt [Bohèmia, avui
República Xeca],
26 de juliol de 1942



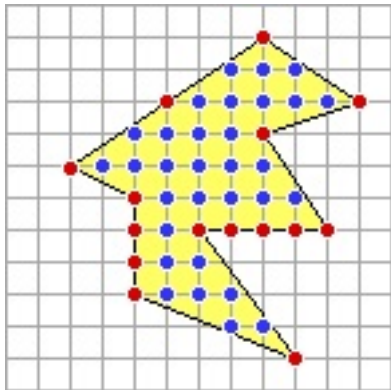
Pràctica: teorema de Pick

Exercici pràctic cinquè

- Fer casos i casos que ens ajudin a convèncer-nos de la validesa d'aquest teorema.
- Usar les peces del tàngram i de l'estomaquíó.

▶ saltar-se la solució

Un exemple del teorema de Pick

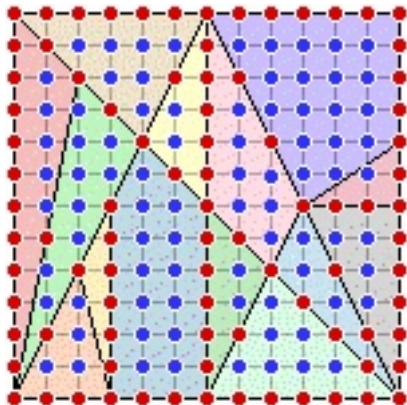


Usant el teorema de Pick l'àrea de la figura adjunta es calcula simplement aplicant la fórmula de Pick:

$$31 + \frac{1}{2}15 - 1 = 37,5.$$

▶ final

Un altre exemple del teorema de Pick



Anàlogament podem calcular la superfície de qualsevol tros de l'estomaquíó usant la fórmula de Pick.

Per exemple la cantonada dreta de color blau té la superfície següent:

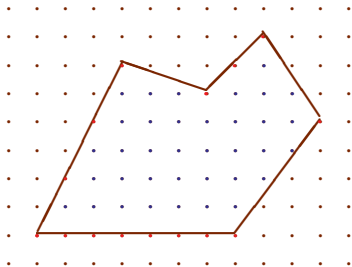
$$18 + \frac{1}{2}14 - 1 = 24.$$

Una demostració possible del teorema de Pick

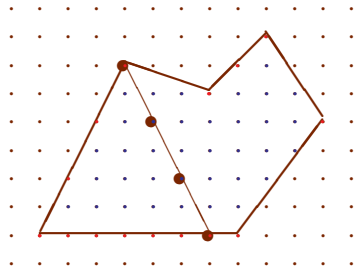
Hi ha moltes demostracions del teorema de Pick. En farem una per **inducció elemental**, basada en el **caràcter additiu** de la fórmula.

Considerem un polígon i un triangle reticulars P i T , amb una aresta comuna.

Suposem que el teorema de Pick és vàlid per a P . Hem de veure que també ho és per al polígon addició $P \oplus T$.



(a)



(b)

Una demostració possible del teorema de Pick

Atès que P i T tenen una aresta comuna, tots el punts, menys dos, de l'aresta comuna són punts interiors del polígon reticular $P \oplus T$. Si el nombre de punts de la vora comuna és c , aleshores

$$I_{P \oplus T} = (I_P + I_T) + (c - 2) \text{ i}$$

$$V_{P \oplus T} = (V_P + V_T) - 2(c - 2) + 2.$$

Hem de veure que el teorema és vàlid també per al polígon addició $P \oplus T$.

Una demostració possible del teorema de Pick

Atès que suposem que el teorema és vàlid per a P i T , per separat, podem escriure:

$$\begin{aligned}
 S_{P\oplus T} &= S_P + S_T \\
 &= I_P + \frac{1}{2}V_P - 1 + I_T + \frac{1}{2}V_T - 1 \\
 &= (I_P + I_T) + \frac{1}{2}(V_P + V_T) - 2 \\
 &= (I_{P\oplus T} - (c - 2)) + \frac{1}{2}(V_{P\oplus T} + 2(c - 2)) - 2 \\
 &= I_{P\oplus T} + \frac{1}{2}(V_{P\oplus T}) - 1.
 \end{aligned}$$

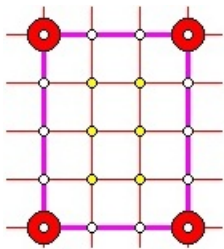
Una demostració possible del teorema de Pick

Tot rau, doncs, a demostrar la validesa per a triangles:

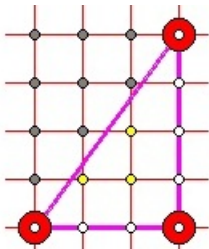
- 1 Per a un rectangle R que tingui $n + 1$ i $m + 1$ punts a cada costat, resulta que $V_R = 2(m + n)$, $I_R = (m - 1)(n - 1)$ i $S_R = mn$, i el resultat és evident.
- 2 Per a tot triangle rectangle R , calculem el que s'esdevé amb el rectangle que s'aconsegueix amb dos triangles rectangles. Si el triangle té tres costats de $m + 1$, $n + 1$ i $d_T + 2$ punts, aleshores $V_T = m + n + d_T + 1$, I_T i $S_T = \frac{1}{2}mn$. Ara calculem els punts interiors i de la vora del rectangle: $V_R = 2(m + n)$, $I_R = d_T + 2I_T$ i, per tant, $S_R = mn = (m + n) + d_T + 2I_T - 1$. Ara cal dividir per 2.
- 3 Tot triangle T proporciona, doblant-lo, un paral·lelogram P , i el paral·lelogram es descompon en un rectangle interior i dos triangles rectangles laterals que compleixen el teorema i, per la llei additiva, tot queda resolt.

Una demostració possible del teorema de Pick

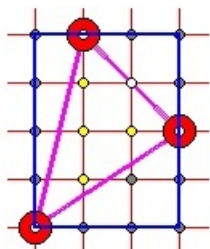
Cal analitzar els casos possible, que són:



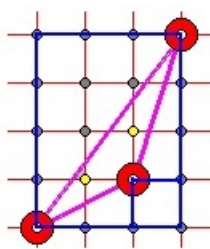
(1)



(2)



(3)



(4)

► veure la solució del *Sulbasutra*

► veure un exemple del teorema de Pick

► veure'n un altre

Part darrera

Problemes per passar l'estona

Dotze problemes per passar l'estona

Problemes

- 1 Determina el valor dels costats del polígons regulars inscrits i circumscrits a una circumferència de radi unitat de tres, quatre, cinc, sis, vuit, deu i quinze costats.
Dedueix-ne els sinus i tangents dels angles corresponents.
- 2 Demostra la validesa de la construcció euclidiana del pentàgon regular. Dóna'n una altra.
- 3 Demostra la correcció del mètode de construcció del pentàgon regular usant papiroflèxia.
- 4 Determina el valor del segment auri AM , si $AB = 1$.
Demostra que és incommensurable.
Fes una demostració per descens, usant:
 - 1 El segment petit MB és el segment auri del segment gran.
 - 2 Si del rectangle auri trec el quadrat del costat petit, quad un rectàngli auri.
 - 3 Perllongant dues diagonals adequades del pentàgon regular trobar un pentàgon regular més petit.

Dotze problemes per passar l'estona

Problemes

- 5 Demuestra que, amb regle i compàs, es pot construir el polígon regular de quinze costats? Com? Per què?
- 6 Demuestra la correcció de la construcció de l'icosàedre regular de LUCA PACIOLI.
Dedueix-ne la construcció del dodecàedre regular.
- 7 Amb regle i compàs pots sumar i restar segments.
Si disposes d'un segment unitat, pots multiplicar-los, dividir-los i treure'ls-hi les arrels quadrades.
- 8 Amb regle i compàs pots resoldre qualsevol problema geomètric que porti a una equació de segon grau els coeficients de la qual siguin longituds de segments donats o construïts.
- 9 Pots demostrar que el compàs escolar i el compàs euclidià —sense memòria— són el mateix compàs.

Dotze problemes per passar l'estona

Problemes

- 10 Pensem els vèrtexs d'un polígon regular com els *afixos* dels nombres complexos que determinen els seus vèrtexs en una circumferència de radi unitat. Suposem que és un polígon regular amb un nombre senar $2m + 1$ de costats. Cada dos vèrtexs conjugats z_i i \bar{z}_i satisfan:

$$z_i + \bar{z}_i = 2 \cos \frac{2\pi}{2m+1} \quad i \quad z_i \times \bar{z}_i = 1.$$

Satisfan, doncs, cada parella l'equació quadràtica:

$$Z^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{2m+1} Z + 1 = 0.$$

Per què no són sempre cosntruïbles amb regle i compàs?

- 11 Fes amb tàngram la fletxa i la no-fletxa.
 Demostra, amb el teorema de Pick que tenen la mateixa superfície.
- 12 Completa la demostració del teorema de Pick.
 Busca'n una altra.