Exemple 1: POLÍEDRES

Aquest exemple consta d'un seguit d'activitats seqüenciades que poden fer-se en unes tres o quatre sessions de classe. Es tracta d'una activitat a desenvolupar en grups de treball. Els materials necessaris són el Creator i el transportador d'angles.
Després de les activitats proposades per als alumnes, hi ha un conjunt d'explicacions per al professorat per facilitar-ne l'aplicació a l'aula.

1. Construïu políedres emprant les peces de Creator. Compteu el nombre de cares, el nombre de vèrtexs i el nombre d'arestes, i empleneu la taula següent:

NOM DEL POLÍEDRE	NOMBRE DE CARES	NOMBRE DE VÈRTEXS	NOMBRE D'ARESTES

2. Expliqueu el procediment que heu seguit per fer els recomptes demanats. Trobeu una estratègia que us permeti comptar amb seguretat els políedres "complicats".

3. Feu una descripció senzilla i per escrit dels políedres que heu construït.

4. D'entre els políedres anteriors, quins us sembla que mereixen el qualificatiu de regulars i per què?

5. Si no els teniu tots (són cinc) construïu-los ara i feu una taula com l'anterior només amb aquests políedres:

NOM DEL POLÍEDRE	NOMBRE DE CARES	NOMBRE DE VÈRTEXS	NOMBRE D'ARESTES
TETRÀEDRE			
OCTÀEDRE			
ICOSÀEDRE			
HEXÀEDRE			
DODECÀEDRE			

6. Si no la teniu ja, feu una descripció per escrit dels políedres regulars.

7. Busqueu una relació entre el nombre de cares ***C***, el nombre de vèrtexs ***V*** i el nombre d'arestes ***A*** dels políedres que us han sortit en els apartats anteriors. Aquesta relació s'anomena fórmula d'Euler, ja que fou aquest matemàtic suís del segle XVIII qui la va introduir.

8. Construïu els prismes que pugueu amb les peces de Creator i mireu si compleixen la relació que heu trobat abans.

9. Podríeu demostrar-la per a tots els prismes? Com podríeu comptar les cares, les arestes i els vèrtexs d'un prisma qualsevol?

10. Construïu les piràmides que pugueu amb les peces de Creator i mireu si compleixen la relació d'Euler.

11. Podríeu demostrar-la per a totes les piràmides? Com podríeu comptar les cares, les arestes i els vèrtexs d'una piràmide qualsevol?

12. Tots els políedres compliran la relació d'Euler? Què opineu i per quin motiu?

13. Empleneu la taula següent:

NOM DEL POLÍEDRE	ANGLES DE LES CARES	SUMA DELS ANGLES A CADA VÈRTEX	DEFICIÈNCIA ANGULAR EN UN VÈRTEX	NOMBRE DE VÈRTEXS	SUMA DE LES DEFICIÈNCIES ANGULARS
	α_i	$\sum \alpha_i$	$360^0 - \sum \alpha_i$	V	$V(360^0 - \sum \alpha_i)$
TETRÀEDRE					
OCTÀEDRE	60º	240º	120º	6	720º
ICOSÀEDRE					
HEXÀEDRE					
DODECÀEDRE					

14. Quines conclusions podeu extreure a partir de l'estudi de la taula?

A continuació, s’exposen els comentaris per al professorat referits a aquesta activitat. Cal entendre-ho tot amb certa dosi de flexibilitat, perquè l’alumnat pot ser molt divers.

1. Introducció

Es dóna aquí una versió curta de l'activitat i s’esmenten les possibles ampliacions a l’apartat 4 d’aquests comentaris. En principi es pot fer en 3 o 4 sessions.

Aquesta activitat està pensada perquè es faci, en part, en grups de treball i, en part, individualment.

2. Què es treballa amb aquesta activitat?

1. Nomenclatura i classificació dels políedres.
2. Elements dels políedres.
3. Distinció entre políedre còncau i políedre convex.
4. Políedres regulars.
5. Teorema d'Euler a l'espai.
6. Inducció empírica de lleis. Límits de les conjectures.

3. Comentaris als apartats

Apartats 1, 2 i 3

Aquest primer apartat vol deixar molta llibertat a l’alumnat. No cal partir ni tan sols de la definició de políedre ni de la nomenclatura. Es tracta que experimentin, preferiblement en grups, i que construeixin políedres de manera intuïtiva. La necessitat d'una nomenclatura apareixerà així de forma natural.

Pot ser força interessant demanar-los que descriguin per escrit les figures creades i que els altres grups intentin construir-les amb aquestes dades.

El professor, en qualsevol cas, haurà de fer les precisions necessàries. Inicialment serà bo fer-los veure com s'encaixen les peces correctament, cosa que en general capten amb facilitat.

Pel que fa als recomptes, cal dir que es persegueix l'objectiu que trobin alguna forma segura i fiable de comptar (que no consisteixi a fer servir totes les mans del grup...). Se’ls poden fer els suggeriments següents de forma progressiva:

i) Quantes cares de cada mena heu fet servir per construir el políedre?
ii) Quants vèrtexs té cada cara? Quantes cares concorren a cada vèrtex del políedre?
iii) Quantes arestes té cada cara? A quantes cares és comuna cada aresta?

Així, per exemple, per a un icosàedre tindran:

i) S’han fet servir 20 triangles equilàters: $C = 20$.

ii) Cada cara té 3 vèrtexs. A cada vèrtex del políedre hi concorren 5 triangles. Per tant:

$$V = (20 \text{ x } 3)/ 5 = 12$$

iii) Cada cara té 3 arestes. Cada aresta és comuna a 2 cares. Per tant:

$$A = (20 \text{ x } 3) / 2 = 30$$

Si el políedre no és regular, hauran d'estudiar el mateix per a cada classe de cares i de vèrtexs si cal. Així, per exemple, per a un cuboctàdre tindran:

i) S'han fet servir 6 quadrats i 8 triangles equilàters. Això dóna 6 + 8 = 14 cares = *C*.

ii) Es tenen 6 quadrats amb 4 vèrtexs i 8 triangles amb 3 vèrtexs. A cada vèrtex del políedre hi concorren 4 cares. Per tant:

$$V = [(6 \text{ x } 4) + (8 \text{ x } 3)] / 4 = 12.$$

iii) Anàlogament:

$$A = [(6 \text{ x } 4) + (8 \text{ x } 3)] / 2 = 24.$$

A l'activitat poden sortir políedres de tota mena. No tots tindran un nom canònic; en aquests casos els poden batejar a base d'atributs. Per exemple, políedre1: còncau/convex de tantes cares de tal mena i tantes de tal altra, etc.

És probable que surti algun políedre còncau i improbable que en surti cap amb algun forat o que no compleixi el teorema d'Euler. Pot ser que el concepte de cara, de vèrtex, d'aresta, i, fins i tot, el de políedre, trontolli en algun d'aquests casos; això, però, serà molt enriquidor.

Apartats 4, 5 i 6

No es tracta que els alumnes arribin a fer una definició estricta del concepte de políedre regular; es tracta, sobretot, que observin amb atenció les diverses figures que han construït i que seleccionin les que considerin regulars. Es poden suscitar algunes situacions interessants. És possible, per exemple, que considerin el deltàedre de sis cares com a políedre regular. Serà convenient, aleshores, demanar-los que comparin aquest políedre amb l'octàedre i que vegin que el nombre de cares a cada vèrtex no és el mateix en el cas del deltàedre.

La taula amb els noms es pot mantenir amagada fins que es consideri necessari.

Convé que cada grup d'alumnes construeixi i descrigui tots els políedres regulars.

Apartat 7

És convenient que el professor hagi detectat possibles errors de recompte abans de proposar aquest apartat de l'activitat. No és fàcil que, sense ajuda, tots els grups o tots els alumnes arribin a fer la conjectura $C + V = A + 2$. L'ajuda que es pot donar en última instància, si no progressen, és: "sumeu el nombre de cares i el nombre de vèrtexs i observeu el que passa".

És molt important que se'ls faci veure que això només és una conjectura i que, per tant, podria resultar falsa.

Apartats 8, 9, 10 i 11

Amb aquests apartats s'intenta donar plausibilitat a la conjectura feta.

Amb Creator només es poden construir alguns prismes i piràmides; valdria la pena recordar les piràmides obliqües.

Les demostracions per a prismes i piràmides són relativament senzilles, si l'alumnat té en compte l'estructura d'aquests políedres. Tanmateix, però, molt pocs alumnes entendran plenament les demostracions i tampoc tindran gaire clara la necessitat de fer-les. La generalització a un prisma o a una piràmide qualsevol amb bases de *n* costats és un pas que comporta un grau d'abstracció que no és a l'abast de tothom. Malgrat tot, aquesta és una bona ocasió per fer les primeres passes en la introducció del raonament deductiu. Aquestes són les proves:

a) Un prisma és un políedre format per dues bases iguals i paral·leles; totes les cares laterals són paral·lelograms. Si les bases són polígons de *n* costats, el prisma tindrà *n* cares laterals i els valors de *C, V* i *A* són els següents:

$C = 2 + n$ (les dues bases i les *n* cares laterals);

$V = 2n$ (els *n* vèrtexs de la base superior més els *n* de la base inferior);

$A = 2n + \frac{2n}{2} = 3n$ (comptem les *n* arestes de cadascuna de les dues bases més les 2*n* arestes dels paral·lelograms compartides sempre per dues cares).

La relació d'Euler es compleix, doncs, per a qualsevol prisma:

$$C + V = 2 + n + 2n = 2 + 3n = A + 2.$$

b) Una piràmide és un políedre format per una base que és un polígon qualsevol de *n* costats i totes les cares laterals són triangles. Els valors de *C, V* i *A* són els següents:

$C = 1 + n$ (la base i les *n* cares laterals);

$V = 1+ n$ (els *n* vèrtexs de la base i el vèrtex o cim de la piràmide);

$A = n + \frac{2n}{2} = 2n$ (comptem les *n* arestes de cadascuna de les dues bases més les 2*n* arestes laterals dels triangles compartides sempre per dues cares).

Novament constatem, doncs, que la relació d'Euler es compleix per a qualsevol piràmide:

$$C + V = 1 + n + 1 + n = 2 + 2n = A + 2.$$

Apartat 12

A l'apartat 1 poden haver sorgit políedres que no compleixen la relació d'Euler, però això és molt improbable. Cal tenir en compte també que, en principi, l'alumnat tindrà la convicció que el teorema és vàlid per a qualsevol políedre.

Es pot aprofitar l'activitat per presentar-los altres políedres que no hagin vist, entre els quals se n'hi poden incloure alguns que no compleixin el teorema d'Euler. Per exemple:

a) L'estrella octangular que es pot construir amb Creator i que els farà dubtar sobre els conceptes de cara, d'aresta i de vèrtex.

b) Marcs variats: un marc de secció triangular i base plana, un d'anàleg però sense base plana (per exemple, simètric), un marc de secció trapezoïdal (aquests tres no es poden construir amb Creator i caldrà portar-los o dibuixar-los) i un marc de secció rectangular que es pot construir amb Creator. Només el darrer dels marcs compleix el teorema (amb recompte intuïtiu).

c) Dos cubs enganxats per una aresta (el políedre resultant no compleix el teorema).

d) Un cub amb un forat en una cara, però no traspassat, i un cub gran amb un cub petit a sobre d'una de les seves cares. Cap dels dos compleix el teorema.

e) Formes estrellades dels políedres.

Vegeu la taula següent*:

NOM DEL POLÍEDRE	NOMBRE DE CARES	NOMBRE DE VÈRTEXS	NOMBRE D'ARESTES
ESTRELLA OCTANGULAR	8	8	12
MARC DE SECCIÓ TRIANGULAR I BASE PLANA	9	12	20
MARC DE SECCIÓ TRIANGULAR I SENSE BASE PLANA	12	12	24
MARC DE SECCIÓ TRAPEZOÏDAL	16	16	24
MARC DE SECCIÓ RECTANGULAR	10	16	24
CUBS ENGANXATS PER UNA ARESTA	10	16	23
CUB AMB CLOT CÚBIC EN UNA CARA	11	16	24
CUB GRAN AMB UN CUB PETIT SOBRE UNA DE LES CARES	11	16	24
PETIT DODECÀEDRE ESTRELLAT	12	12	30
GRAN DODECÀEDRE ESTRELLAT	12	20	30
GRAN DODECÀEDRE	12	12	30
GRAN ICOSÀEDRE	20	12	30

(*) En alguns casos es fa servir el concepte intuïtiu de cara, vèrtex i aresta que poden tenir els alumnes, sense aprofundir en consideracions topològiques ni entrar en el concepte de símplex, que estaria fora de l'abast d'aquestes sessions.

La conclusió de l'apartat passa per veure els límits de la conjectura feta a 7. Per no complicar-ho es pot dir que el teorema d'Euler és vàlid per als políedres convexos.

Apartats 13 i 14

En aquests apartats es recupera el treball amb angles de les activitats de geometria plana.

Els políedres que compleixen el teorema d'Euler sempre donaran una deficiència angular de 720º. Es pot demostrar que aquestes dues condicions són equivalents, però potser això estarà fora de les possibilitats dels nostres alumnes. Se'n dóna aquí la demostració per si es considera interessant exposar-la:

Considereu un políedre convex de C cares, V vèrtexs i A arestes.

La deficiència angular D total serà igual a 360º pel nombre de vèrtexs, menys la suma dels angles de totes les cares:

$$D = (V \cdot 360^\circ) - (\text{suma dels angles de totes les cares})$$

Es calcula aquesta darrera suma:

Cara 1: polígon de x_1 costats; suma dels angles de la cara 1 = $(x_1 - 2).\ 180^\circ$
Cara 2: polígon de x_2 costats; suma dels angles de la cara 2 = $(x_2 - 2).\ 180^\circ$
....
....
....
Cara C: polígon de x_C costats; suma dels angles de la cara C = $(x_C - 2).\ 180^\circ$

Si se suma tot, s'obtindrà la suma dels angles de totes les cares:

$$S = (x_1 - 2) \cdot 180^\circ + (x_2 - 2) \cdot 180^\circ + ... + (x_C - 2) \cdot 180^\circ =$$
$$= (x_1 + x_2 + ... + x_C) \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ \cdot C = 2 \cdot A \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ \cdot C = 360^\circ \cdot (A - C)$$

(ja que $x_1 + x_2 + ... + x_C = 2 \cdot A$, en ser cada costat comú a dues cares)

Ara es pot calcular la deficiència angular total:

$$D = 360^{\circ} \cdot V - [360^{\circ} (A - C)] = 360^{\circ} \cdot [\, C + V - A \,]$$

Si un políedre compleix el teorema d'Euler $[\, C + V - A \,] = 2$ i $D = 720^{\circ}$ i, recíprocament, si $D = 720^{\circ}$, per força $[\, C + V - A \,] = 2$ i el políedre complirà el teorema d'Euler.

Si es considera convenient fer la demostració, abans caldrà que omplin la taula, preferentment amb políedres convexos que ja hagin sortit en apartats anteriors, tot i que també pot ser interessant incloure-n'hi alguns de nous que es puguin construir amb Creator; per exemple, tots els deltàedres, les bipiràmides i alguns políedres arquimedians.

4. Possibles activitats complementàries

Finalment, s'esmenten algunes activitats que es poden fer partint del treball amb Creator, força interessants i que poden servir com a feina a casa o com a base per construir noves activitats o cadenes d'activitats:

1) La construcció de tots els deltàedres.

2) La construcció de políedres arquimedians i de políedres estrellats.

3) Problemes relacionats amb la coloració de les cares dels políedres.

4) Estudi de les representacions planes dels políedres.

5) Estudi de les seccions del cub.

6) Cristal·lografia geomètrica.

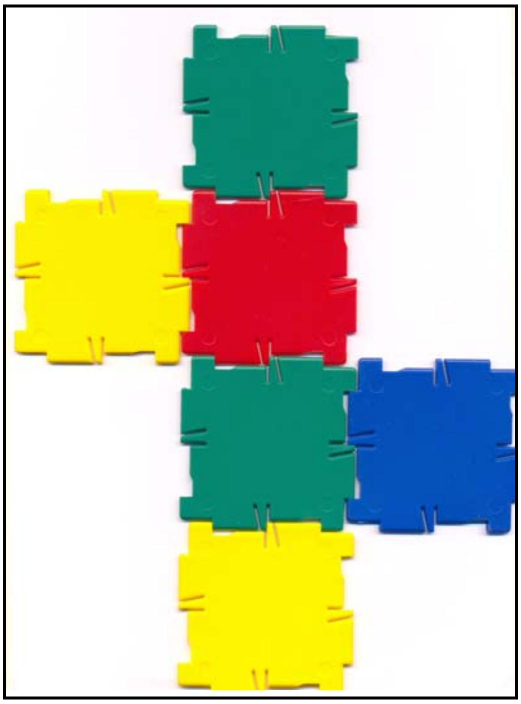
7) Història dels políedres.

Exemple 2: DESENVOLUPAMENTS PLANS D'ALGUNS POLÍEDRES. CÀLCUL I ESTIMACIÓ DE VOLUMS.

Ajuntem els alumnes en grups de tres i els proposem les activitats següents:

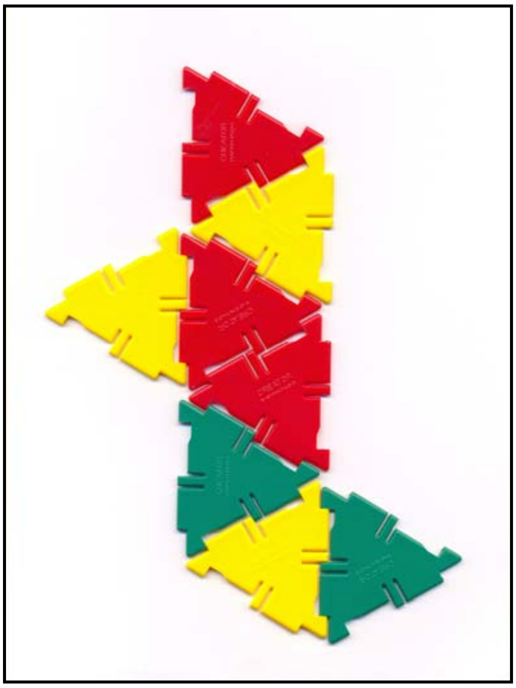
1. Agafeu 4 peces en forma de triangle equilàter de Creator, poseu-les planes sobre la taula i estudieu quines agrupacions permeten construir tetràedres i quines no ho permeten. Dibuixeu-les totes.

2. Agafeu 6 peces en forma de quadrat de Creator, poseu-les planes sobre la taula i estudieu quines agrupacions permeten construir hexàedres i quines no ho permeten. Dibuixeu només les que ho permeten. Al dibuix teniu un exemple d'agrupació de sis quadrats que permet construir un cub.



3. Mesureu el costat del cub en cm i mm i calculeu la seva àrea en cm^2 i en mm^2. Trobeu també el volum del cub en cm^3 i en litres. Aproximadament, quants cubs com aquests caldrien per omplir tota l'aula? Expliqueu com feu els càlculs.

4. Preneu 8 peces en forma de triangle equilàter de Creator, poseu-les planes sobre la taula i estudieu quines agrupacions permeten construir octàedres i quines no ho permeten. Dibuixeu les que ho permeten. Al dibuix teniu un exemple d'agrupació de vuit triangles que permet construir un octàedre.



5. Mesureu el costat de l'octàedre en cm i mm i empreu el teorema de Pitàgores per calcular les altures de les cares i l'altura del políedre. A continuació, calculeu-ne l'àrea en cm^2 i en mm^2.

A partir de la fórmula que permet calcular el volum d'una piràmide, trobeu el volum de l'octàedre en cm^3 i en litres. Aproximadament, quants octàedres com aquests caldrien per omplir tota l'aula? Expliqueu com feu els càlculs.