1. NOMBRES NATURALS

1.1. INTRODUCCIÓ

Els nombres naturals, que els matemàtics simbolitzem per la lletra $\mathbb{N}$ (que ve, evidentment, de la inicial de naturals), són la base de tota l'aritmètica. A partir d'aquests nombres es poden construir tots els altres conjunts numèrics. Aquestes construccions, però, que en més d'un cas i des d'una perspectiva històrica, són força recents, no semblen gaire adequades per a la secundària. No sembla tampoc recomanable presentar els nombres naturals a partir de la teoria de conjunts i de cardinals -feina també força recent, si es considera la globalitat de la història de les matemàtiques- o presentar-los axiomàticament (com ho va fer Peano); més aviat caldrà pensar a fer-ne una presentació intuïtiva.

Pel que fa a l'estructura algèbrica dels naturals, caldria pensar també a presentar-la des d'un punt de vista intuïtiu. L'alumnat pot observar les propietats de les operacions a través dels exemples per extreure'n conclusions posteriorment. D'altra banda, un treball aprofundit sobre la jerarquia de les operacions combinades és molt necessari.

Trobar contextos adequats per al treball amb nombres naturals no és excessivament complicat. Aquí n'esmentarem tres d'excel·lents: els problemes de recompte, les progressions aritmètiques i geomètriques i la matemàtica recreativa.

1.2. IDEES I SUGGERIMENTS

1.2.1. La noció actual de nombre natural

Ja s'ha dit que és recomanable fer una presentació intuïtiva dels naturals. Tanmateix, això no vol dir que el professorat no hagi de ser conscient de la definició actual de nombre natural.

El primer intent rigorós de definir els nombres naturals i de deduir-ne les propietats va ser l'axiomàtica de Peano (matemàtic italià, 1858- 1932). La seva idea consisteix a no embolicar-se en la definició i presentar-los a partir dels cinc axiomes següents:

1. 1 és un nombre natural (eventualment es pot canviar l'1 pel 0 sense cap problema).
2. Tot nombre natural n té un successor $n^+ = n+1$ que també és un natural.
3. Si S és un subconjunt dels naturals tal que $1 \in S$ i $n^+ \in S$ sempre que $n \in S$, es té, forçosament, $S = \mathbb{N}$ (aquest axioma és el principi d'inducció matemàtica).
4. $n^+ \neq 1$ per a tot natural n.
5. Si n i m són dos naturals tals que $n^+ = m^+$, aleshores $n = m$.

Amb aquests cinc axiomes Peano deduïa totes les propietats dels naturals.

Posteriorment, amb la sedimentació de la teoria de conjunts, han aparegut dues formes més de construir els naturals.

La primera, que és obra de Bertrand Russell i d'Alfred North Whitehead, parteix de la teoria de classes (les classes inclouen com a cas particular els conjunts) i consisteix -simplificant-ho molt- a establir una relació d'equivalència entre les classes: dues classes són equivalents si, i només si, es pot establir una relació 1-1 (o bijectiva, o biunívoca) entre elles. Així, per exemple, el nombre natural 2 seria la classe d'equivalència a la qual pertanyen totes les parelles no ordenades $\{a,b\}$ amb $a \neq b$ (s'ha de notar que aquests parells no formen un conjunt).

La segona, que es pot trobar exposada, per exemple, en el llibre de Paul R. Halmos, *Teoria intuitiva de los conjuntos*, consisteix, molt resumidament, en el següent:

1) Per a tot conjunt X es defineix el conjunt successor d'X com: $X^{+} = X \cup \{X\}$ (l'axioma de les unions garanteix que això és un conjunt).

2) El zero natural s'identifica amb un conjunt amb 0 elements, és a dir amb el conjunt buit ϕ:

$$0 = \phi$$

3) Es defineixen la resta de naturals a través dels successors:

$$1 = 0^{+} = \phi \cup \{\phi\} = \{\phi\} = \{0\}$$
$$2 = 1^{+} = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{\{0\}\} = \{0, \{0\}\} = \{\phi, \{\phi\}\} = \{0,1\}$$
$$3 = 2^{+} = \{0,1,2\}$$
...

4) Aquests tres passos, però, no garanteixen que el procés de construcció de successors pugui portar-se fins a l'infinit. Es necessita un nou axioma en la teoria de conjunts, l'anomenat axioma de l'infinit: existeix un conjunt que conté el 0 i el successor de cadascun dels seus elements.

5) Es diu que un conjunt A és un conjunt de successors si, i només si, $0 \in A$ i $x^{+} \in A$ sempre que $x \in A$.

6) L'axioma de l'infinit garanteix l'existència d'un conjunt de successors. Finalment, la intersecció de tots els conjunts de successors inclosos en A serà $\mathbb{N}$.

Totes aquestes complicacions, que aquí només s'han deixat entreveure, són no obstant del tot innecessàries a secundària. De fet, el mateix Paul R. Halmos ho té molt clar:"[...] Si vol ser un matemàtic necessita conèixer la teoria de conjunts. Conegui-la, absorbeixi-la i oblidi-la [...]"

1.2.2. La inducció matemàtica

La utilització no necessàriament rigorosa -es pot fer de forma intuïtiva, si cal- del principi d'inducció matemàtica (axioma 3 de Peano) pot ser adequada per als nivells de secundària (cal pensar més aviat en els batxillerats i en el currículum variable). Es pot fer veure als alumnes les grans possibilitats que ofereix aquest mètode, tant per fer demostracions, com per donar definicions.

Les demostracions per inducció d'una fórmula o d'una proposició que es refereix a tots els nombres naturals $\mathbb{N}$ requereixen els dos passos següents:

1) Es prova que la fórmula o l'asseveració és vàlida per al primer nombre natural considerat (que, en general, serà l'1).

2) Se suposa que la fórmula o l'asseveració és vàlida per al natural n i es prova que també ho és per al natural $n+1$.

S'ha de fer veure a l'alumnat que la primera part és sempre una comprovació senzilla i que a la segona part es compta sempre amb una hipòtesi molt sòlida i clara que facilita enormement el treball.

Aquest mètode demostratiu, la validesa del qual pot ser aparentment sorprenent, no es contradiu amb la intuïció. Si s'estableix una analogia entre els naturals i una escala amb infinits graons, els dos passos del mètode es traduirien de la forma següent:

1) Aquest pas permet pujar el primer graó.

2) El segon pas garanteix que si s'arriba a un graó determinat, es pot arribar al graó següent.

Si es pot pujar el primer graó i cada cop que s’arriba a un graó se sap passar al següent, és lògic i intuïtiu, doncs, pensar que es podrà pujar indefinidament.

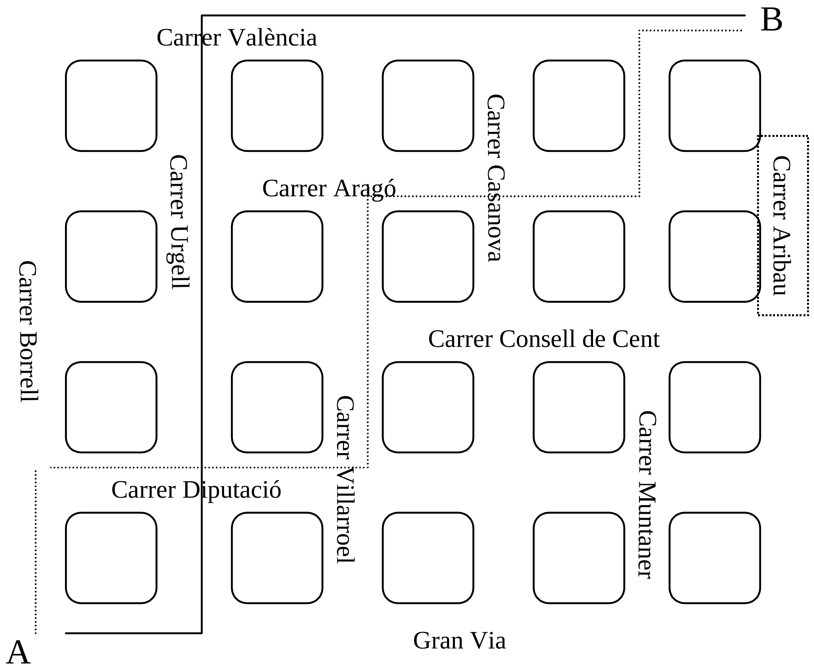
Les definicions per inducció es fan de manera similar. Es defineix un objecte matemàtic que depengui d'n natural per a $n = 1$, i tot i suposant-lo definit per a $n = n$, se'l defineix per a n+1. La definició de determinant sense fer ús d'inducció, per exemple, resulta força complicada. En canvi, amb aquest mètode, resulta molt més assequible.

1.2.3. Comptar organitzadament

Un context excel·lent per al treball amb nombres naturals l'ofereixen els problemes de recompte. A continuació s'exposen dos exemples d'aquest tipus d'exercicis que poden permetre introduir els nombres combinatoris. El primer exemple presenta una situació-problema amb la seva resolució explícita d'acord amb l'esquema clàssic de Polya. El segon exemple, anàleg al primer, només està proposat. Es tractaria de resoldre els problemes en grups de treball.

Exemple 1

La figura representa una part de l'Eixample barceloní. Una persona vol anar des d'*A* (Gran Via-Borrell) fins a *B* (Aribau-València) pel camí més curt possible. De quantes maneres pot fer-ho?



Fase I: comprensió del problema

Es tracta que els alumnes esbrinin el significat de "camí més curt possible" (han de concloure que no es pot anar ni avall ni a l’esquerra).

S'hauran d'ajudar de dibuixos i de proves.

No serà senzill aclarir quines són exactament les dades (han de sortir: l'origen, el destí, el dibuix, el nombre de carrers cap amunt i el nombre de carrers cap a l'esquerra).

Caldrà donar-los les ajudes adients sempre en forma de preguntes.

L'elecció d'una notació adequada serà fonamental per aclarir el problema.

Fase II: plantejament i estratègies

En aquesta fase els alumnes haurien de fer més proves i una estimació o tempteig que després es pot contrastar amb el resultat.

Es poden revisar les tècniques de comptar que coneguin, si escau.

Les ajudes poden consistir a fer proves amb menys carrers i a atorgar una simbolització als trajectes:

E = esquerra;   *A* = amunt

Així:

Trajecte 1 = *EAAAAEEEE*   i

Trajecte 2 = *AEEAAEEAE*

Fase III: execució de l'estratègia

Aquí cal la tècnica concreta o la forma concreta de comptar de quantes maneres podem posar quatre símbols *A* en 9 llocs.

Si coneixen les combinacions, no hi haurà problema. En cas contrari caldrà arribar al resultat amb més calma.

$$\text{Nombre de trajectes} = \binom{9}{4} = \frac{9.8.7.6}{4.3.2.1} = 126$$

Fase IV: revisió i conclusions

A banda de repassar la resolució i comparar amb l'estimació, que probablement s'haurà quedat curta, pot ser interessant discutir què passaria si comptem les *B* que podem col·locar en els 9 llocs disponibles o viceversa.

Un cop resolt el problema, es poden proposar als grups activitats per practicar raonaments per analogia:

I) Analogia simple o directa:

1. Resoleu el mateix problema si hi ha 15 carrers verticals i 13 carrers horitzontals.

2. Resoleu el problema per a *m* carrers horitzontals i *n* carrers verticals.
   (Això és una generalització. Caldrà anar amb compte a fer-los veure que el nombre de carrers total no coincideix amb el nombre de quadres a recórrer).

3. Resoleu el mateix problema per a 23 carrers verticals i 17 carrers horitzontals.
   (Això és una particularització).

Exemple 2

Un partit d'handbol s'ha acabat amb el resultat de 23 a 18. Durant el partit, el marcador ha pogut variar de maneres molt diverses. Aquí en teniu dos exemples:

LOCAL - VISITANT			*LOCAL - VISITANT*		
1	-	*0*	*0*	-	*1*
2	-	*0*	*1*	-	*1*
3	-	*0*	*2*	-	*1*
3	-	*1*	*2*	-	*2*
3	-	*2*	*3*	-	*2*
....			....		
....			....		
....			....		
23	-	*17*	*22*	-	*18*
23	-	*18*	*23*	-	*18*

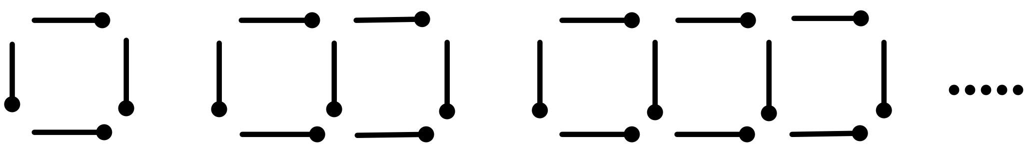
De quantes maneres diferents ha pogut evolucionar el marcador?

1.2.4. Progressions aritmètiques

Les progressions aritmètiques ofereixen un altre context excel·lent per al treball amb nombres naturals. Sobretot si es presenten com a problemes de recompte i, si és possible, amb la utilització de materials. A continuació se'n proposen alguns exemples.

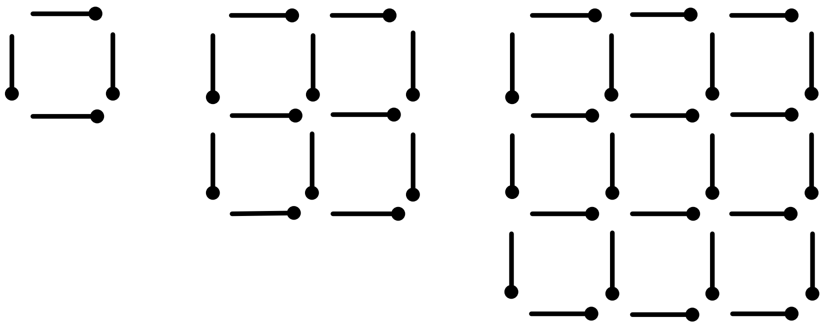
Exemple 1

Quants llumins es necessiten per construir 14 quadrats en fila, de tal manera que el costat de cada quadrat sigui un llumí, tal i com es veu a la successió del dibuix?



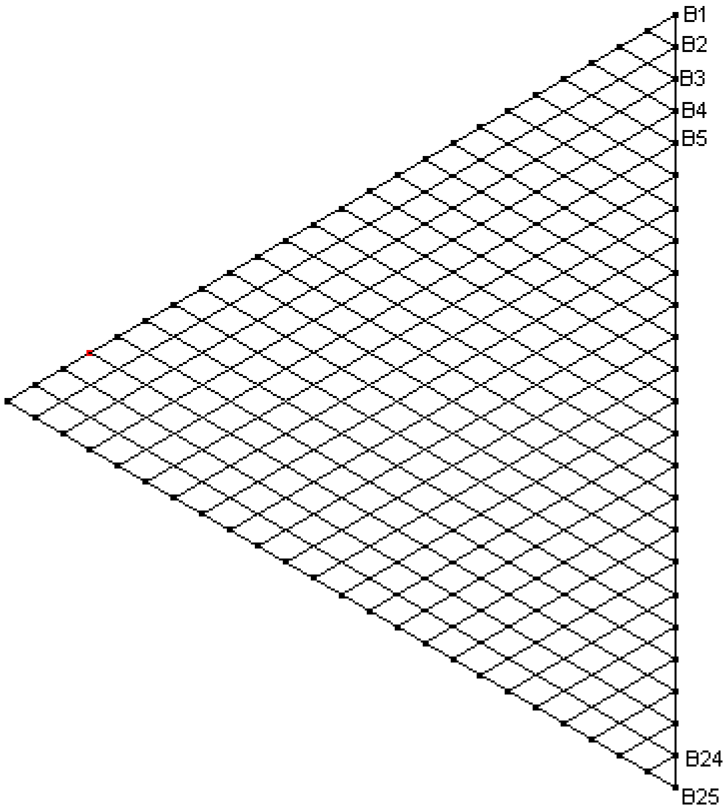
Exemple 2

Quants llumins es necessiten per construir N^2 quadrats unitaris formant un altre quadrat més gran, com en la successió següent?



Exemple 3

Tenim un enreixat de túnels com el de la figura. Des del punt A surten al mateix temps i cap a la dreta 16.777.216 formigues. Cada cop que arriben a una bifurcació, la meitat de les que hi arriben se'n va cap a la dreta i l'altra meitat cap a l'esquerra.
Volem saber quantes formigues arribaran als punts *B1*, *B2*, *B3*, ... , *B25*.



Exemple 4

Karl Friedrich Gauss (1777-1855) va ser un matemàtic i també un gran físic de final del XVIII i principi del XIX (fins i tot se'l va anomenar "Princeps Mathematicorum"). A més, va ser una ment molt precoç.
Hom diu que, de petit, exasperava el seu mestre amb la seva rapidesa per resoldre els problemes que li plantejava. Un bon dia, però, el mestre va decidir posar-li un problema ben llarg per tenir-lo una estona entretingut:

"*Suma els primers 60 nombres naturals*" li va dir.
El jove Gauss va acabar en pocs segons. El mestre es va irritar novament. Com s'ho va fer?

Exemple 5

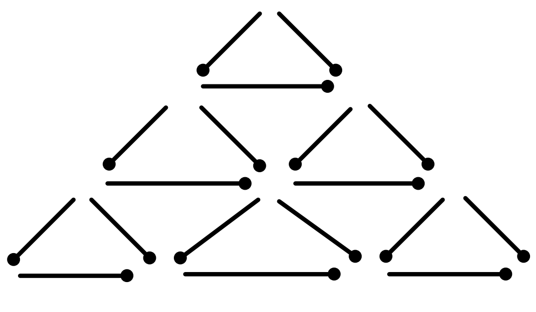
Troba la suma dels 50 primers nombres naturals parells.

Exemple 6

Troba la suma dels 25 primers nombres imparells.

Exemple 7

Amb llumins d'una mateixa mida construïm figures com la del dibuix adjunt:

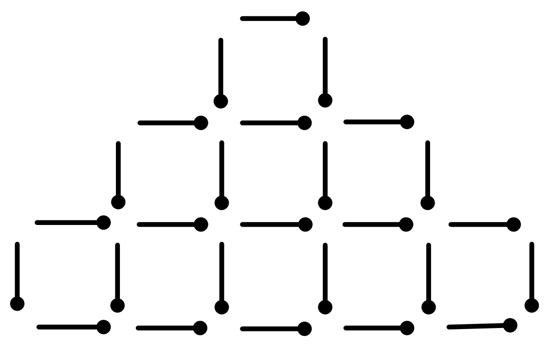


Quants llumins necessitaríem per construir una figura de 100 "pisos"?

Amb 375.750 llumins, quants pisos podríem fer? I amb 10^6 llumins, quants pisos podríem fer? Ens sobraria algun llumí?

Exemple 8

Amb llumins d'una mateixa mida construïm figures com la del dibuix adjunt:



Quants llumins necessitaríem per tal de construir una figura de 100 "pisos"?

1.2.5. Problemes i exercicis de la matemàtica recreativa

En general, els problemes de la matemàtica lúdica s'han emprat com a recurs "decoratiu" a les classes de matemàtiques. Quan ja no hi ha programa, quan hi ha un dia penjat al final d'un trimestre, sembla que és l'hora dels problemes lúdics. Molts experts en didàctica de les matemàtiques han arribat a la conclusió que això és un error. Els problemes lúdics s'han d'integrar, com una peça més, com un recurs magnífic, dins de les activitats normals a l'aula. En Martin Gardner, un dels més grans experts en la matemàtica lúdica, ens diu:

> *"Sempre he cregut que el millor camí per fer les matemàtiques interessants als alumnes i als profans és el que consisteix a apropar-s'hi a través del joc. En nivells superiors les matemàtiques poden i han de ser mortalment serioses. En nivells inferiors, però, no és possible motivar cap alumne a aprendre, per exemple, la teoria de grups, tot dient-li que la trobarà meravellosa, estimulant o àdhuc útil si algun dia arriba a ser un físic especialitzat en partícules. El millor mètode per mantenir despert un estudiant consisteix segurament a proposar-li un joc matemàtic que l'intrigui, un passatemps, una broma, una paradoxa, un model, un trencaclosques o qualsevol de les mil coses que els professors avorrits solen refusar perquè pensen que són frivolitats."*

A continuació es presenten alguns exemples.

Exemple 1

Esborreu dos nombres i només dos per fila i per columna de tal manera que els nombres restants sempre sumin 15:

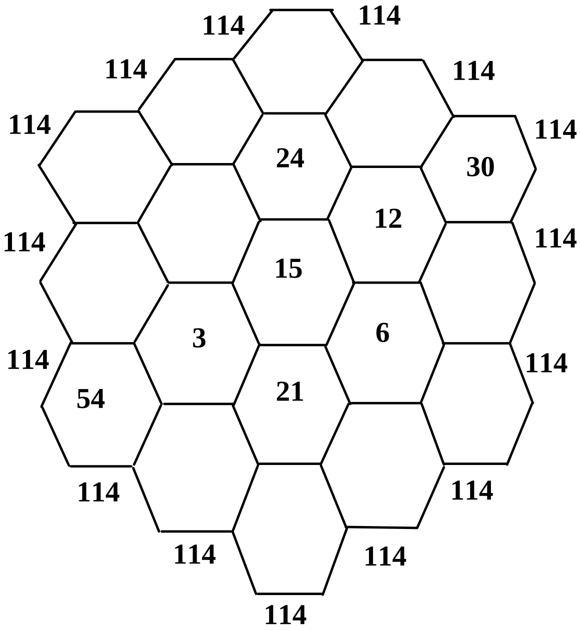
3	**7**	**3**	**1**	**7**	**4**
3	**8**	**2**	**2**	**6**	**1**
4	**4**	**3**	**4**	**5**	**2**
8	**1**	**5**	**7**	**1**	**6**
7	**2**	**1**	**5**	**4**	**8**
1	**5**	**9**	**4**	**2**	**3**

Exemple 2

Escriviu un nombre qualsevol de tres xifres i repetiu-lo a la seva dreta. Dividiu el nombre de sis xifres que es forma per 13 i el quocient obtingut per 11 i després per 7. Veureu que torna a sortir el nombre inicial.
Podríeu esbrinar què és el que passa? Podríeu donar una justificació general d'aquest fet? Podríeu generalitzar el resultat?

Exemple 3

Les sumes de cada columna i de cada diagonal (d'esquerra a dreta o de dreta a esquerra) a la figura formada per hexàgons és sempre igual a 114. Podríeu esbrinar quin nombre correspon a cadascuna de les caselles?

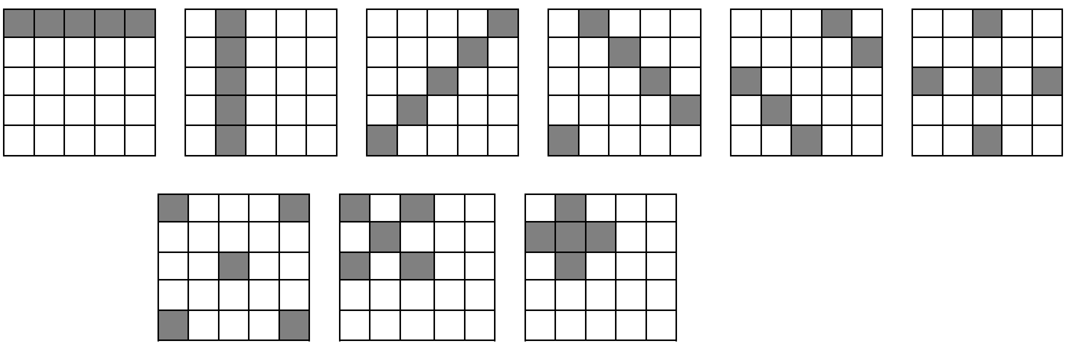


Exemple 43

Empleneu les taules següents de tal manera que les sumes de les caselles de les posicions indicades (i totes les homòlogues) siguin sempre 65.

25			14	
	9			3
		13	6	
	21			
	12		23	16

	24	2		
	18	11		
		25		
23				
17	15			



2. NOMBRES ENTERS

2.1. INTRODUCCIÓ

Des d'una perspectiva històrica, la noció de nombre enter triga molt a ser formalitzada. De fet, els nombre negatius no han estat acceptats plenament fins a principi del segle XX.

El període que va des de l'aparició dels nombres negatius fins a la seva acceptació plena ha durat més de 1.000 anys i ha estat ple d'avenços i de retrocessos.

La matemàtica grega clàssica, dominada fortament per la geometria, no va conèixer els nombres negatius. Ni tan sols Diofant d'Alexandria, que va fer ús preferent dels mètodes algebraics, va considerar la possibilitat que existissin nombres negatius (només considerava les solucions positives de les equacions).

Segons sembla, els matemàtics hindús van ser els primers a considerar els nombres negatius. La invenció que havien fet del sistema posicional de numeració de base 10 i la seva mentalitat poètica els va permetre concebre aquests nombres abstractes.
La primera obra en la qual hi ha constància explícita de les regles aritmètiques que regeixen els nombres negatius és del matemàtic hindú Brahmagupta (any 628).

La civilització àrab, que a partir de l'any 622 va dominar políticament i culturalment gran part d'Àsia i d'Europa, tot i recollir l'herència hindú va oblidar els nombres negatius. És possible que fos així a causa de la identificació que feien entre nombre i magnitud i també a causa de la mentalitat fonamentalment pràctica que va dominar els seus grans algebristes.

A Europa els nombres negatius no apareixen fins al Renaixement, quan els algebristes italians els van acceptar com a artificis de càlcul i els van anomenar nombres ficticis.

La incertesa i els dubtes sobre els nombres negatius va tornar a reaparèixer durant els segles XVI, XVII i XVIII. Així, per exemple, François Viète (1540-1603), considerat com un dels pares de l'àlgebra simbòlica, no va admetre mai els nombres negatius, ni com a coeficients ni com a solucions de les equacions. Posteriorment, Descartes evitava els negatius i transformava les equacions amb solucions negatives -que ell anomenava falses- en equacions amb solucions positives. Altres matemàtics en canvi, com ara el flamenc Albert Girard (1590-1639) i l'anglès Jhon Wallis (1616-1703), van admetre els nombres negatius amb totes les seves conseqüències. En el XVIII l'enciclopedista francès D'Alembert va fer seriosos esforços per legitimar l'ús dels negatius, però no va evitar certes contradiccions (per exemple diu: "*una quantitat negativa és aquella que és observada com a menys que res i que va precedida del signe menys*"; mentre que en un altre text afirma: "*dir que la quantitat negativa és menys que res és expressar una cosa que no es pot concebre*"...).

Els primers intents seriosos per donar una base sòlida als nombres enters negatius apareixen en el segle XIX amb el baró de Cauchy (1789-1857). Tanmateix, les formalitzacions precises i l'admissió definitiva dels negatius no es s’esdevé fins a l'aparició dels treballs del matemàtic alemany Herman Henkel (1839-1873), que ja no cercaven una base intuïtiva per a aquests objectes matemàtics, sinó una base formal.

Els ensenyants, certament, hauríem de tenir en compte aquestes dificultats històriques i pensar detingudament quina introducció es fa del concepte de nombre negatiu. És un fet reconegut per tots els experts en didàctica que els conceptes matemàtics que la humanitat ha trigat a acceptar o a construir són difícils per a l’alumnat. Avui comptem, però, amb l'avantatge de tenir a la nostra disposició contextos clars i quotidians que fan servir nombres negatius i amb el fet que, a més, la societat s'ha familiaritzat ja amb l'ús d'aquests nombres (al contrari del que passa amb els nombres imaginaris).

D'altra banda, s'ha de dir que alguns dels aspectes més interessants dels nombres enters vists des de la perspectiva matemàtica, no tenen cabuda en el currículum obligatori ni de l'ESO ni dels batxillerats. Així, la noció de congruència, els conjunts de classes de restes $\mathbb{Z}/(m)$, la noció d'ideal, el caràcter principal de l'anell $\mathbb{Z}$, etc., només admetrien ser tractades en alguna optativa o en algun treball de recerca dels batxillerats.
En canvi, les similituds estructurals entre el conjunt dels enters $\mathbb{Z}$ i el dels polinomis $\mathbb{R}[x]$ sembla prou interessant com per insistir-hi, en el batxillerat, de cara a tenir un bon exemple de la utilitat de treballar amb estructures abstractes.

2.2. IDEES I SUGGERIMENTS

2.2.1. Criteris de divisibilitat

A banda de la utilitat que puguin tenir els criteris de divisibilitat sembla interessant intentar que els alumnes els descobreixin pels seus propis mitjans. Es tracta d'una excel·lent ocasió per treballar amb conjectures i per inferir les lleis a partir de l'observació. Així, per exemple, no els ha de resultar gens difícil aventurar que tots els múltiples de 10 acaben en 0, en veure una bona llista de múltiples de 10. També seran fàcils o relativament fàcils d'inferir els criteris de divisibilitat per 2, 3, 4, 5 i 9.
El criteri de divisibilitat per 11 (suma de dígits de lloc parell menys suma de dígits de lloc imparell = múltiple d'11) els ha de resultar més difícil. Altres possibles criteris, com ara el de 7, no semblen tenir gaire interès a causa de la seva complexitat (el criteri de divisibilitat per 7 consisteix a separar els dígits en grups de tres i aprofitar les congruències $10^3 \equiv -1$ mòdul 7, $10^6 \equiv 1$ mòdul 7, $10^9 \equiv -1$ mòdul 7, etc. Així, per exemple, $531.428.135 = 135 + 428 \cdot 10^3 + 531 \cdot 10^6 \equiv 135 - 428 + 531 \equiv 238 \equiv 0$ mòdul 7).

És evident que l'ús de les calculadores ha minvat l'interès -com a mínim aparentment- per aquests criteris. S'ha de fer veure als alumnes, però, que el treball amb nombres de molts dígits es facilita molt amb l'ús d'aquests criteris.

2.2.4. Sistemes de numeració

El treball amb sistemes de numeració històrics pot ser d'interès per a l'alumnat. Caldrà però, anar amb compte de no crear confusions en els alumnes que tinguin dificultats.

El treball amb sistemes de numeració de base no decimal, activitat freqüent ara fa uns anys a secundària, sembla més aviat desaconsellable. Especialment a l'ESO i en el currículum comú.

2.2.5. Contextos

La recerca de contextos per treballar els nombres negatius ha estat constant en els darrers anys. Se n' han trobat d'interessants -com ara les temperatures, les hores i les diferències horàries al voltant del món, els calendaris i les datacions, etc.- i la seva utilitat és evident.

Tanmateix, quan cal passar a les multiplicacions, els contextos perden tot el significat i no ajuden gaire: què vol dir multiplicar -3 º per -5 º?

Alguns autors consideren que no és bo amagar les autèntiques necessitats -de tipus estrictament matemàtic i concretament algèbric- que han portat a la construcció o creació dels nombres enters. En qualsevol cas el debat resta obert.

3. NOMBRES RACIONALS

3.1. INTRODUCCIÓ

El treball amb nombres racionals positius no hauria de comportar gaires dificultats per als alumnes de secundària, ja que es disposa de nombrosos contextos que permeten una aproximació intuïtiva i lligada al món real. Tanmateix, la realitat demostra que després dels anys d'escolarització obligatòria moltes persones tenen greus dificultats amb qüestions molt bàsiques i útils per a la vida quotidiana relacionades amb els nombres racionals (com ara els percentatges o l'aproximació dels decimals).

D'altra banda, el treball algebraic amb les fraccions també pot oferir dificultats importants per a molts alumnes. No deixa de ser colpidor que la majoria dels adults no sàpiguen fer correctament operacions amb fraccions. Això és així fins i tot entre els que tenen estudis universitaris.

La revista Suma de juny del 1999, en un interessant article de títol *Problemas actuales de nuestra educación matemática*, recollia un seguit de recomanacions de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales que potser val la pena revisar set anys després. D'entrada, l'article recollia una anècdota molt reveladora en què s'explica que l'esmentada Real Academia havia convocat una reunió els dies 5 i 6 de febrer de 1999 amb el tema monogràfic "problemes de l'educació matemàtica a primària i a secundària a l'Estat espanyol". A la reunió es va arribar a la conclusió que molts dels objectius que es plantegen i s'assoleixen (en major o menor mesura) a l'àmbit escolar no surten mai d'aquest àmbit i no arriben a formar part dels coneixements pràctics que fa servir una persona adulta a la vida quotidiana. Com a exemple paradigmàtic d'aquesta situació s'explica que, en el decurs de la reunió, es va plantejar si persones de gran formació, l'exercici professional de les quals estigués relativament lluny de l'àmbit matemàtic, conservarien o no la capacitat d'operar amb fraccions senzilles. Sobre la marxa, a la mateixa reunió, es va dur a terme un petit experiment: es va plantejar de fer la suma $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ a quatre catedràtics d'universitat (un de dret, un d'història, un de bioquímica i un d'anatomia) amb el resultat que només el bioquímic va ser capaç de fer correctament l'operació.

Caldria considerar que les operacions amb fraccions no tenen una importància bàsica? Potser les operacions amb fraccions només formen part de l'àmbit escolar? Què es pot fer per millorar aquesta situació? L'ús abusiu de la calculadora i el treball amb expressions numèriques abstractes, sense que els estudiants els atorguin un significat són, segons sembla, les causes principals dels problemes anteriors. El cert és que ens caldrà fer un replantejament de l'ensenyament i de l'aprenentatge de les operacions amb nombres racionals.

És curiós també constatar que el treball amb fraccions no té les mateixes característiques a tot arreu: els nois i noies britànics, per exemple, en sumar 2/3 + 5/7 donen com a resultat 1+ 8/21 i no 29/21 com posem aquí habitualment.

3.2. IDEES I SUGGERIMENTS

3.2.1. La introducció dels racionals a l'ESO

Per a la introducció i el treball amb nombres racionals a l'ESO es disposa de contextos força adequats: el treball amb percentatges, el treball amb proporcions i l'estadística descriptiva (freqüències relatives, diagrames sectorials, etc.). A més, també hi ha contextos més tradicionals però igualment efectius i interessants: fraccions horàries, fraccions d'unitats de mesura habituals (quart de litre, terç de litre, cinquè de litre, mitja lliura, etc), treball amb receptes de cuina on apareguin fraccions, repartiment de pastissos o altres objectes fraccionables, etc.
En principi, doncs, el professorat té l'oportunitat de treballar en àmbits propers a la realitat de l'alumnat la qual cosa ha de facilitar la comprensió del concepte de fracció. Tanmateix, tal i com s'apuntava a la introducció, caldrà insistir molt en el treball amb proporcions i percentatges. Tot i que es pugui pensar que es tracta de temes molt senzills que l'alumnat captarà immediatament, el cert és que fora de l'àmbit escolar es pot comprovar que això no ha estat així i que, a l'hora de la veritat, un percentatge pot convertir-se en un misteri.

Amb els algorismes operacionals amb fraccions les dificultats d'ensenyament i d'aprenentatge són força més complexes. S'haurien de tenir en compte els factors següents:

a) En primer lloc, hi ha un fenomen de confusió entre els algorismes de la suma, de la resta, de la multiplicació i de la divisió, sobretot, si les fraccions que s'empren no estan contextualitzades.

b) En el cas de les sumes i de les restes, s'hi afegeix la dificultat del càlcul del mínim comú múltiple, ja que aquesta tècnica pot no estar assimilada convenientment.

c) Tot plegat pot portar l'alumnat a pensar que les operacions amb fraccions són una mena de màgia operativa misteriosa i artificiosa l'interès de la qual no va més enllà de superar els exàmens escolars.

d) S'ha de constatar també que les fraccions no s'utilitzen a l'hora de fer operacions de la vida quotidiana i que, per tant, en general els adults no saben fer operacions amb fraccions (activitat que es considera reservada a l'àmbit escolar i específicament a les matemàtiques).

e) D'altra banda, el professorat ha de lluitar contra l'atracció fatal de la calculadora que evita el treball amb fraccions.

Per afrontar tots aquests problemes, els experts recomanen les actuacions següents:

i) El professorat ha de treballar, sempre que sigui possible, amb nombres fraccionaris contextualitzats i amb significat intrínsec.

ii) El professorat ha de fer un esforç per trobar situacions que permetin atorgar significat a les operacions (certament això no sempre és senzill).

iii) No s'ha de perdre el temps treballant amb fraccions extremadament complicades (no formen part de la realitat quotidiana).

iv) No s'ha de sotmetre l'alumnat (i especialment l'alumnat que té dificultats d'aprenentatge) al martiri dels anomenats "castells" d'operacions amb fraccions.

3.2.2. Expressió decimal dels racionals. Fraccions generatives

És molt important fer veure a l'alumnat de secundària obligatòria que tots els nombres racionals admeten, a més de la seva expressió com a fraccions equivalents, una expressió decimal que es pot calcular sense dificultats.

El camí invers, és a dir, el pas de les expressions decimals a les fraccions, comporta la dificultat del càlcul de les fraccions generatives i potser caldria pensar a deixar-lo per a l'alumnat dels batxillerats.
És recomanable fer aquests càlculs emprant equacions i no pas a partir de fórmules o del càlcul de la suma de sèries; per exemple:

$x = 0'353535... = 0'\overset{\frown}{35}$
$100\,x = 35'353535... = 35'\overset{\frown}{35}$
Si es resta s'obté: $99\,x = 35$. Per tant: $x = 35/99$

Pot ser interessant fer veure a l'alumnat que les expressions decimals no són necessàriament úniques. Tot i que això eventualment els pot pertorbar, és una qüestió prou suggeridora i pot captar l'interès d'alguns alumnes. Es poden presentar, per exemple, els resultats següents:

a) Tot nombre enter admet dues expressions decimals, per exemple:

$1 = 1'00000.... = 0'999999..... = 0'\overset{\frown}{9}$.

En general, si p és un enter:

$p = p'00000... = (p-1)'999999....= (p-1)'\overset{\frown}{9}$

b) Tot decimal finit (o acabat en infinits zeros) admet una segona expressió decimal infinita; per exemple:

$0'342 = 0'3420000.... = 0'341999999.... = 0'341\overset{\frown}{9}$

En general, per un decimal finit d es té:

$d = E'\,r_1\ r_2\,r_3\ r_4\ r_5 \,....\, r_n = E'\,r_1\ r_2\,r_3\ r_4\ r_5\,....\,r_n\,0000... =$
$= E'\,r_1\ r_2\,r_3\ r_4\ r_5\,....\,(r_n-1)9999... = E'\,r_1\ r_2\,r_3\ r_4\ r_5\,....\,(r_n - 1)\,\overset{\frown}{9}$

El càlcul de la fraccions generatives corresponents els ha de convèncer de la validesa de l'afirmació feta.

3.2.3. La numerabilitat de $\mathbb{Q}$

Parlar de la infinitud del conjunt $\mathbb{Q}$ dels racionals -en els batxillerats- és força interessant per als grups d'alumnes que no tenen dificultats. El tema de l'infinit és pertorbador i encisador a la vegada.

Es recullen, a continuació algunes possibles idees clau:

a) La diferència entre el concepte de conjunt finit i el de conjunt infinit pot resumir-se de la manera següent: és impossible establir una aplicació bijectiva entre un conjunt finit i una de les seves parts; en canvi, es pot establir una relació 1-1 entre un conjunt infinit i un subconjunt propi.

b) Els infinits enganyen la intuïció. Aparentment, per exemple, pot fer l'efecte que $\mathbb{Z}$ "té el doble" d'elements que $\mathbb{N}$. Tanmateix això no és cert. Efectivament, es pot muntar una bijecció entre $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$ de forma senzilla:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{lcr} 0 & \to & 0 \\ 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & -1 \\ 3 & \to & 2 \\ 4 & \to & -2 \\ 5 & \to & 3 \\ 6 & \to & -3 \\ 7 & \to & 4 \\ 8 & \to & -4 \\ 9 & \to & 5 \\ 10 & \to & -5 \end{array}$$

És a dir:

$$f(a)=\begin{cases} -\dfrac{a}{2} & \text{si } a \text{ és parell} \\ \dfrac{a+1}{2} & \text{si } a \text{ és senar} \end{cases}$$

Resulta, doncs, que la infinitud de $\mathbb{N}$ i de $\mathbb{Z}$ és del mateix tipus: és el que s'anomena *infinit numerable*.

És probable que la causa per la qual hom pot pensar que $\mathbb{Z}$ té el "doble" d'elements que $\mathbb{N}$ vingui donada pel fet que $\mathbb{N}$ té un primer element, mentre que $\mathbb{Z}$ no en té. Barrejant qüestions d'ordre i qüestions de cardinalitat la intuïció pot embolicar-nos.

c) Contra el que la intuïció podria dictar, també es pot establir una bijecció entre el conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$ i el conjunt dels nombres racionals $\mathbb{Q}$. El primer a fer-ho va ser Georg Cantor (1845-1918). Seus són el terme “numerable” i la primera teoria consistent sobre l’infinit. El 1895 Cantor va disposar els nombres racionals positius en files infinites: a la primera fila els racionals amb denominador 1, a la segona els de denominador 2, a la tercera els de denominador 3, etc. (s’ha de constatar que en aquesta disposició hi ha nombres que es repeteixen, com ara 1/1 i 3/3 o 1/2 i 2/4; el que importa, però, és que hi són tots). A continuació va proposar “numerar-los” en diagonal com a l’esquema que es presenta a continuació:

1/1; 2/1; 3/1; 4/1; 5/1; 6/1; 7/1; 8/1;...

1/2; 2/2; 3/2; 4/2; 5/2; 6/2; 7/2; 8/2;...

1/3; 2/3; 3/3; 4/3; 5/3; 6/3; 7/3; 8/3;...

1/4; 2/4; 3/4; 4/4; 5/4; 6/4; 7/4; 8/4;...

1/5; 2/5; 3/5; 4/5; 5/5; 6/5; 7/5; 8/5;...

1/6;...

També es pot definir, per exemple, l'aplicació següent que és injectiva:

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N} \qquad \text{amb } f(m/n) = 2^m \cdot 3^n$$

En definitiva, doncs, el conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals té el mateix tipus d'infinitud que el conjunt dels naturals: $\mathbb{Q}$ és *infinit numerable*.

d) Hi ha conjunts infinits no numerables. L'exemple més interessant el proporciona el conjunt dels nombres reals $\mathbb{R}$ (vegeu l'apartat següent).

4. NOMBRES REALS

4.1. INTRODUCCIÓ

Tot i que els nombres irracionals ja eren coneguts pels matemàtics grecs clàssics, els nombres reals, tal i com els coneixem avui, són una construcció matemàtica bastida en el segle XIX (concretament, tres grans matemàtics, Cantor, Dedekind i Weierstrass, van donar tres versions d'aquesta complicada construcció). S'ha de constatar, doncs, que la humanitat ha tingut greus problemes per fer seus aquests nombres i no es pot esperar que els alumnes de secundària hi passin per sobre tranquil·lament.

La dificultat que comporta la construcció formalitzada dels nombres reals va més enllà dels problemes observats en les construccions dels conjunts numèrics $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$, dels enters i dels racionals. El fet que no siguin problemes purament algebraics els que portin a construir $\mathbb{R}$, sinó la incompletesa dels racionals, és la base d'aquesta dificultat afegida.

Això vol dir que queda fora de l'abast de l'alumnat de secundària -no solament del de l'ESO, sinó també de l'alumnat dels batxillerats- tractar la construcció dels nombres reals.

En qualsevol cas, aquest fet no té gaire importància de cara a fer matemàtiques amb els nombres reals. Senzillament s'hauran de postular algunes de les seves propietats o, fins i tot, s'hauran d'emprar implícitament sense preocupar-se de la seva procedència.

És difícil que l'alumnat de secundària s'adoni de les necessitats matemàtiques que han portat a concebre els nombres reals. Les justificacions habituals consistents a provar, per exemple, que $\sqrt{2}$ no és un racional, són força interessants tot i que difícilment seran captades amb totes les conseqüències que se'n deriven per l'alumnat.

Potser l'aproximació més intuïtiva que es pot fer al conjunt dels reals sigui a través de la seva expressió decimal. Tanmateix, el professorat de matemàtiques de secundària pot fer una feina de divulgació científica, exempta de precisions formals, que presenti als alumnes els grans problemes matemàtics que hi ha darrera dels nombres reals. Es pot aclarir, per exemple, quins nombres reals són racionals i quins són irracionals i, d'entre aquests, quins són algebraics i quins són transcendents.

4.2. IDEES I SUGGERIMENTS

4.2.1. L'expressió decimal dels nombres reals

Ja es comentava a la introducció que, probablement, aproximar-se als reals des de la perspectiva de la seva expressió decimal sigui el més aconsellable.

S'ha de fer veure als alumnes que tots els racionals, és a dir, que totes les fraccions són expressables com a decimals finits o periòdics (el càlcul d'algunes fraccions generatives pot aclarir força les coses).

L'existència de decimals no finits i no periòdics pot resultar fins i tot natural. Es pot, a més, calcular tot un seguit de decimals d'algun irracional algebraic -com ara $\sqrt{2}$ - amb algun algorisme i presentar alguna aproximació de pi amb força decimals. També es pot presentar algun decimal infinit no periòdic en el qual sigui clara la forma de generar les xifres decimals, per exemple:

1'234567891011121314151617181920.....

A partir d'aquestes idees pot ser també més senzill fer-los veure que hi ha infinits irracionals.

4.2.2. $\mathbb{R}$ no és numerable

A l'apartat corresponent als nombre racionals ja s'ha parlat de la numerabilitat del conjunt dels nombres racionals $\mathbb{Q}$. És interessant fer notar als alumnes que el conjunt dels reals ja no té aquesta característica. No és fàcil, però, donar una justificació d'aquesta afirmació. Aquí es presenta una demostració relativament senzilla de la no numerabilitat del conjunt dels nombres reals:

Teorema: " El conjunt dels nombres reals no és numerable".

N'hi ha prou de provar que l'interval obert $I =]0,1[\subset \mathbb{R}$ no és numerable.

Es procedeix per reducció a l'absurd. Si aquest conjunt fos numerable, tots els seus elements podrien escriure's com una successió:

$$\{a_n\} = I$$

Es considera aleshores l'expressió decimal de cadascun dels termes de la successió:

$$a_n = 0'a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3}\, a_{n4}\, a_{n5}\, a_{n6}...$$

A continuació es construeix dins de l'interval *I* un nombre real *r* diferent de tots els termes de la successió amb la qual cosa s'arriba a un absurd. Es defineix el real *r* a través de la seva expressió decimal:

$$r = 0'\,r_1\ r_2\ r_3\ r_4\ r_5\ r_6 \ldots$$

Essent:

$$r_n = \begin{cases} 1, & \text{si } a_{nn} \neq 1 \\ 2, & \text{si } a_{nn} = 1 \end{cases}$$

És evident que el real *r* així definit pertany a l'interval *I*. A més, no pot coincidir amb cap dels nombres a_n de la successió:

-el primer decimal d'*r*, és a dir, r_1 és forçosament diferent del primer decimal d'a_1 -que és a_{11}- i, per tant, *r* és diferent d'a_1 ;

-el segon decimal d'*r*, és a dir, r_2 és forçosament diferent del segon decimal d'a_2 -que és a_{22}- i, per tant, *r* és diferent d'a_2 ;

-el tercer decimal d'*r*, és a dir, r_3 és forçosament diferent del tercer decimal d'a_3 -que és a_{33}- i, per tant, *r* és diferent d'a_3 ;

-etc.

En definitiva, s'ha construït un real dins l'interval *I* que no es troba en la forma numerada de presentar l'interval $I=\{a_n\}$ i així es prova que *I* no és un conjunt numerable, amb la qual cosa tampoc ho pot ser el conjunt $\mathbb{R}$ dels nombres reals que l'inclou com a subconjunt.

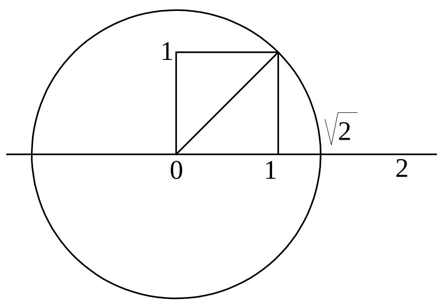
4.2.3. La recta real

La identificació dels nombres reals amb els punts d'una recta és essencial per al treball que hauran de fer els alumnes al llarg de la secundària, sobretot a l'hora d'entrar en la representació gràfica de funcions. S'ha de considerar, per tant, que val la pena dedicar força atenció al treball d'aquesta idea.

De fet, es pot partir de la base que suposa haver representat els enters sobre una recta graduada. S'haurà de fer-los veure com es poden afegir sobre aquesta recta, inicialment, els nombres racionals i, posteriorment, alguns irracionals.

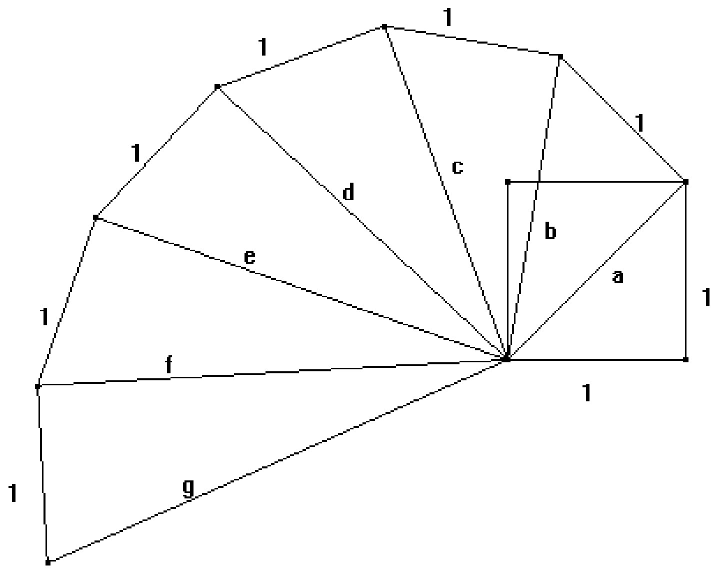
Sembla convenient fer les primeres representacions emprant les aproximacions decimals. Més endavant és interessant representar alguns nombres amb regle i compàs. Per exemple:

a) Es pot construir $\sqrt{2}$ agafant la diagonal d'un quadrat de costat 1:



b) De la mateixa manera podem construir $\sqrt{3}$ agafant l'altura d'un triangle equilàter de costat 2 i $\sqrt{5}$ agafant la diagonal d'un rectangle de costats 2 i 1.

c) L'espiral de radicals permet construir, successivament, les arrels de tots els nombres enters:



Aquesta construcció parteix d'un quadrat de costat 1 amb diagonal $a=\sqrt{2}$. A continuació es construeix un triangle rectangle de costats 1 i $\sqrt{2}$ que té per hipotenusa $b=\sqrt{3}$. Després es construeix un triangle rectangle de costats 1 i $\sqrt{3}$ que té hipotenusa $c=\sqrt{4}$ i així, successivament, s'obtenen $d=\sqrt{5}$, $e=\sqrt{6}$, $f=\sqrt{7}$, $g=\sqrt{8}$, etc.

Totes o algunes d'aquestes construccions són perfectament comprensibles per a una majoria d'alumnes. En canvi, pot resultar molt més complicat convèncer-los que hi ha nombres reals, com ara $\sqrt[3]{2}$ que no es poden representar amb regle i compàs.

4.2.4. Els nombres irracionals. Els nombres algebraics i els nombres transcendents

És interessant que els alumnes comprenguin la diferència entre nombres racionals i irracionals. Pot ser convenient aclarir-los que l'origen d'aquesta terminologia -potser desafortunada- s'ha de buscar en el problema dels incommensurables. També se'ls hauria de fer veure que hi ha "més" nombres irracionals que no pas nombres racionals i això es pot aconseguir a partir del problema de la no numerabilitat d'$\mathbb{R}$.

Comprendre la diferència entre nombres algebraics i nombres transcendents és més difícil. La distinció, però, és prou important des del punt de vista matemàtic i històric, i val la pena dedicar-hi alguna atenció sense preocupar-se pel rigor. Més aviat caldria pensar a fer una feina de divulgació, ja que la complexitat del tema no permet fer demostracions. Tanmateix, les idees presentades poden ser prou suggeridores com per cridar l'atenció d'alguns alumnes.

Es dóna, a continuació, una llista de possibles idees clau:

a) Tots els nombres que es poden obtenir fent operacions -sumes, restes, multiplicacions, divisions i arrels- amb nombres enters s'anomenen nombres algebraics. En particular, doncs, tots els racionals són algebraics. Molts nombres algebraics, però, no són fraccions. Tanmateix, Cantor va demostrar que el conjunt dels nombres algebraics és numerable.

b) Tots els nombres algebraics són solucions d'equacions polinòmiques amb els coeficients enters, per exemple:

$\frac{a}{b}$ amb *a* i *b* enters és solució de l'equació de primer grau $bx - a = 0$.

$\sqrt{2}$ és solució de l'equació de segon grau $x^2 - 2 = 0$.

$\sqrt[3]{2}$ és solució de l'equació de tercer grau $x^3 - 2 = 0$.

c) El matemàtic suís Leonhard Euler (1707-1783) va ser el primer a postular l'existència de nombres reals no algebraics. Els va anomenar nombres transcendents ja que transcendien les operacions algebraiques. Malgrat les seves extraordinàries habilitats matemàtiques no en va poder trobar cap i l'existència dels nombres transcendents va romandre com un misteri fins que el matemàtic francès Joseph Liouville (1809-1882) va "inventar" un nombre real la transcendència del qual va poder demostrar. Aquest és el nombre transcendent de Liouville:

$$1/10^{1!} + 1/10^{2!} + 1/10^{3!} + 1/10^{4!} + 1/10^{5!} + \ldots = 0'1 + 0'01 + 0'000001 + \ldots.$$

No deixa de ser colpidor, però, que el primer nombre transcendent trobat sigui tan "artificial".

d) Des del segle XVIII se sabia que els nombres e i π eren irracionals. Les sospites sobre la possibilitat que fossin transcendents van sorgir ben aviat. Ningú no va poder-ho provar, però, fins el 1837, any en què Charles Hermite (1802-1901) va demostrar que el nombre e és transcendent. Posteriorment, Ferdinand Lindemann (1852-1939) va donar la demostració de la transcendència de π.

Dos dels nombres més famosos de la història de les matemàtiques resulten ser, per tant, transcendents: no són solució de cap equació polinòmica a coeficients enters.

Amb tot això hom pot anar descobrint que els nombres reals són força més complicats, i fins i tot més misteriosos, del que es podia preveure.

e) Alguns nombres algebraics (els que són solucions d’equacions de primer i de segon grau) són construïbles amb regle i compàs sobre la recta real. En canvi, els nombres transcendents no es poden construir amb regle i compàs.

ANNEX

Un altre recurs interessant per a les classes de matemàtiques el trobem en l'ús de contes. Tot i que no hi ha massa materials en aquest àmbit alguns exemples són excel·lents. La lectura i els exercicis següents, per exemple, s'han extret de *L'home que calculava* [1]:

"Alguns dies després, un cop acabats els treballs que estàvem realitzant en el palau del visir, vam anar a donar un volt pel *suk* i pels jardins de Bagdad.

La ciutat presentava, aquella tarda, un moviment intens, febril, fora del comú. Això era perquè, al matí havien arribat dues caravanes de Damasc.

En el basar dels sabaters, per exemple, quasi ni s'hi podia entrar; hi havia sacs i caixes, plens de mercaderies, apilonats pels patis de les posades. Forasters damasquins, amb immensos turbants de diferents colors, que mostraven les seves armes penjades a la cintura, caminaven despreocupadament, mirant amb indiferència cap als mercaders. Se sentia una forta olor d'encens, de kif i d'espècies. Els venedors de faves discutien, quasi es barallaven, i deixaven anar uns renecs terribles en siri.

Un jove guitarrista de Modul, assegut sobre grans sacs plens de síndries, cantava una tonada monòtona i trista:

Què importa la vida de la gent
Si la gent, per mal o per bé
Va vivint, simplement,
La vida que la gent té?

Els venedors, a les portes de les seves parades, pregonaven les seves mercaderies, exaltant-les amb elogis exagerats i fantasiosos, demostrant fins a quin punt n'és, de fèrtil, la imaginació dels àrabs.

-Aquest ric teixit és digne del nostre emir!
-Amics! Vegeu quin deliciós perfum, que evoca les manyagueries de la vostra esposa!
-Fixis, oh Xeic, quines xinel·les i quina túnica brodada! Els *djins* les recomanen als àngels!

Beremiz es va interessar per un elegant i harmoniós turbant de color blau clar que un siri, mig geperut li oferia per 4 dinars. Hi havia un cartell que, amb lletres ben vistoses, deia així:

Els quatre quatres

En veure que Beremiz estava interessat a adquirir el turbant blau, vaig dir-li:

-Em sembla una bogeria comprar aquest luxe. No tenim gaires diners i encara no hem pagat l'hostal.
-No és pas el turbant que m'interessa –va respondre Beremiz- Fixeu-vos que la botiga d'aquest mercader es diu "Els quatre quatres". En això hi ha una sorprenent coincidència digna de ser estudiada!
-Una coincidència? Per què?
-Doncs perquè el que porta escrit aquest cartell fa pensar en una de les meravelles del Càlcul: podem formar un nombre qualsevol només fent servir quatre quatres!

(1) Extret de: TAHAN, M. *L'home que calculava.* Barcelona: Editorial Empúries, 2003.

I abans que jo li demanés que m'aclarís aquell enigma, Beremiz m'ho va explicar, tot dibuixant en la sorra fina que cobria el terra:

-Vull formar un zero? No hi ha res més simple. Només cal escriure:

$$44- 44$$

Aquests quatres formen una expressió que és igual a zero.
Passem al nombre 1. És la forma més còmode:

$$\frac{44}{44}$$

Aquesta fracció representa el quocient de la divisió de 44 per 44. I aquest quocient és 1.

-Vull, ara, fer el nombre 2? Poden utilitzar-se, igualment els quatre quatres i escriure:

$$\frac{4}{4}+\frac{4}{4}$$

La suma de totes dues fraccions és exactament igual a 2. El tres és més fàcil. Només cal escriure la següent expressió:

$$\frac{4+4+4}{4}$$

Fixeu-vos que la suma de 12, dividida per quatre, dóna un quocient de 3. Heus aquí, doncs, el tres format a partir de quatre quatres.

-I com fareu el mateix 4? – vaig preguntar.

-No hi ha res més senzill – va explicar Beremiz - . El 4 pot ser formar de diverses maneres. Heus aquí una expressió equivalent a 4:

$$4+\frac{4-4}{4}$$

Observeu que la segona part és nul·la, i per tant la suma equival a 4. Aquesta expressió és el mateix que dir 4 + 0, és a dir, 4.

Vaig notar que el mercader siri escoltava atent, sense perdre's ni una sola paraula, l'explicació de Beremiz, com si l'interessessin aquestes operacions aritmètiques formades per *quatre quatres.**

Beremiz va prosseguir amb la seva explicació:

- Ara vull formar, per exemple, el nombre 5. No hi ha cap dificultat. Escriurem:

$$\frac{4\times 4+4}{4}$$

* Tenint en compte la naturalesa i la finalitat d'aquest llibre, usem els signes matemàtics moderns, però és evident que en l'època en què va viure Beremiz la notació matemàtica era ben diferent. (Nota de l'autor)

Aquest operació expressa la divisió de 20 entre 4, el quocient de la qual és 5. Tenim d’aquesta manera el 5 escrit amb quatre quatres.

Seguidament passarem al 6 que presenta una forma molt elegant:

$$\frac{4+4}{4}+4$$

Una petita alteració en aquest interessant conjunt proporciona el nombre 7:

$$\frac{44}{4}-4$$

En canvi, per aconseguir el nombre 8, farem servir una operació molt senzilla:

$$4 + 4 + 4 - 4$$

El nombre 9 no deixa de ser també molt interessant:

$$4+4+\frac{4}{4}$$

Heus aquí una expressió molt interessant, igual a 10, formada també per quatre quatres:

$$\frac{44-4}{4}$$

En aquest moment el geperut, amo de la parada, que havia estat escoltant l’explicació del calculista amb un capteniment de respectuós silenci i interès, va dir:

- Pel que acabo d’escoltar, el senyor excel·leix en els comptes i els càlculs. Li donaria com a present el turbant blau si sabés explicar un cert misteri contingut en una suma, que fa dos anys que em tortura l’esperit.

I el mercader va explicar el següent:

-Vaig deixar, una vegada, una quantitat de 100 dinars, 50 a un xeic de Medina i 50 a un jueu del Caire.

El de Medina va pagar la quantitat en quatre parts, de la següent manera: 20, 15, 10 i 5.

Va pagar	20	i va quedar a deure	30
Va pagar	15	i va quedar a deure	15
Va pagar	10	i va quedar a deure	5
Va pagar	5	i va quedar a deure	0
Suma	50	Suma	50

Observi, amic meu, que tant la suma de les quantitats pagades, com la suma del que em devia, són iguals a 50.

El jueu del Caire va pagar, igualment, els 50 dinars en quatre parts, de la manera següent:

Va pagar	20	i va quedar a deure	30
Va pagar	18	i va quedar a deure	12
Va pagar	3	i va quedar a deure	9
Va pagar	9	i va quedar a deure	0
Suma	50	Suma	51

Cal observar, ara, que la primera suma és de 50 (com en el cas anterior), mentre que l'altra dóna un total de 51.

No sé explicar aquesta diferència de 1 que s'observa en la segona forma de pagament. Ja sé prou bé que no en vaig resultar perjudicat, perquè vaig rebre el total de la suma, però ¿com justificar el fet que la segona suma sigui 51 i no pas 50?

- Amic meu – va aclarir Beremiz – això s'explica amb poques paraules....”

Exercicis sobre la lectura

1. A la lectura hem vist que en Beremiz ha estat capaç d'escriure els nombres del 0 al 10 amb quatre quatres. El podríeu ajudar a arribar fins al 20? Podeu emprar els símbols de les operacions suma, resta, multiplicació, divisió, arrel quadrada i potències - que ja coneixeu - i també l'anomenat factorial: per exemple 4! = 4·3·2·1 = 24, i , en general:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot \ldots\ \cdot 2\cdot 1$$

Us donem un exemple més que fa servir l'arrel quadrada i el factorial perquè us serveixi de pista:

$$13 = \frac{4!}{\sqrt{4}} + \frac{4}{4}$$

2. Hi ha altres maneres d'escriure els nombres del 0 al 10 amb quatre quatres? O les solucions d'en Beremiz són úniques?

3. Com penseu que es resol l'enigma que li planteja el venedor sobre els préstecs?

4. Intenteu arribar fins al 30 amb els quatre quatres. No defalliu! S'hi pot arribar!