L'ARITMÈTICA A SECUNDÀRIA

LA INTRODUCCIÓ DELS CONJUNTS NUMÈRICS

ELS CONTEXTOS DE TREBALL

Damià Sabaté
Damia.sabate@upc.edu

Institut de Ciències de l'Educació
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

NOMBRES NATURALS I NOMBRES ENTERS

"El problema de distingir els nombres primers dels nombres compostos i de descompondre aquests darrers en factors primers se sap que és un dels més importants i útils de l'aritmètica [...] La pròpia dignitat de la ciència sembla que ens exigeix que explorem tots els mitjans possibles per trobar la solució d'un problema tan famós i elegant." (Carl Friedrich Gauss 1777-1885)

DIVISIBILITAT
NOMBRES PRIMERS

LA NORIA QUIM MONZÓ

Ardor guerrero

El profesor de primero de ESO alarga la mano hacia la clase.

–A ver, tú –diversos alumnos se miran entre ellos, dudando–. Sí, tú. ¿Con quién crees que estoy hablando?

–A la orden, mi profesor.

–Vamos a ver, mariconazo. Descomposición de un número en factores primos. Lo estudiamos ayer.

–Sí, mi profesor.

–Dijimos que si el número que debemos descomponer es primo no hay duda ni discusión posible, ya que sólo admite dos factores y, por cojones, la descomposición es única. Ejemplo: 31 igual a 1 por 31. ¿Lo recordáis? –todos asienten–. Bien. Pero, ¿y si el número es compuesto? Dime tú qué pasa entonces.

–Si el número es compuesto... Es decir: si es compuesto... Entonces... Mmm... La descomposición será también única pero tendrá más factores...

–¿Que "la descomposición será única"? ¿Cómo quieres que sea única, cabrón? Muy mal. Vas a chupar más imaginarias que tu padre esperando a tu madre. De momento, arrestado quince días. Siéntate. A ver, otro. Tú, hijoputa, sal a la pizarra. ¡Más brío! A ver, escríbeme tres descomposiciones factoriales diferentes del número 72. ¡Ar!

–¿Tres diferentes?

–¡No me repliques porque te meto un puro que te cagas! He dicho que quiero tres descomposiciones factoriales de 72. Y rapidito: tiempo uno, tiempo dos, ¡tiempo tres!

–Pues: 72 es igual a 8 por 9... 72 es igual a 6 por 12...

–¡Más deprisa! Pareces un saco de sebo.

–¡Y 72 es igual a...! 72 es igual a...

–¡Fuera de la pizarra, coño! Una semana de preventiva. ¡Te queda más ESO que al palo de la bandera! Y tú, Gómez, ¿qué miras con cara de idiota?

–¡Nada, señor!

–Ya que estás tan aburrido, vamos a distraerte un poco. Ve a la sala de profesores a ver si estoy.

–Pero, profesor, no puede estar usted en la sala de profesores porque está aquí.

–¡Te he dicho que vayas a la sala de profesores a ver si estoy! Ve, comprueba si estoy o no, vuelve y me informas.

–¡Sí, mi profesor!

Gómez saluda, abre la puerta y desaparece. Por la ventana, el profesor contempla cómo la tutora furriel sale del laboratorio. Dos profesores chusqueros conversan junto al aula magna. Al cabo de unos minutos, Gómez regresa y se cuadra ante el profesor.

–¡No está usted en la sala de profesores, mi profesor!

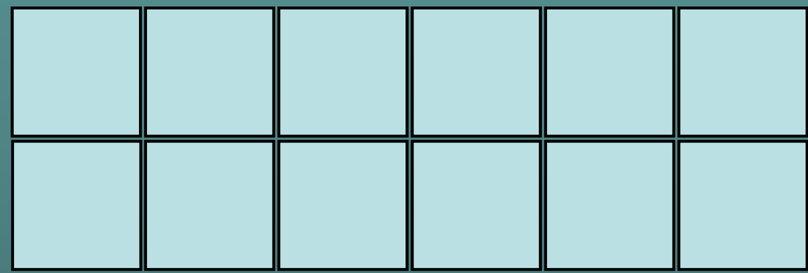
–Bien. Puedes retirarte.

Se oye una corneta. Es el toque de recreo. El profesor contempla orgulloso a sus alumnos. Para ser el segundo día no ha estado mal. Qué equivocados estaban los que al principio se burlaron de la iniciativa ministerial de fomentar el espíritu militar en las escuelas secundarias. Con voz grave da la orden de salir. Los muchachos abandonan el aula en columna de a dos y a paso ligero, cantando a gritos el glorioso himno de primero de ESO.

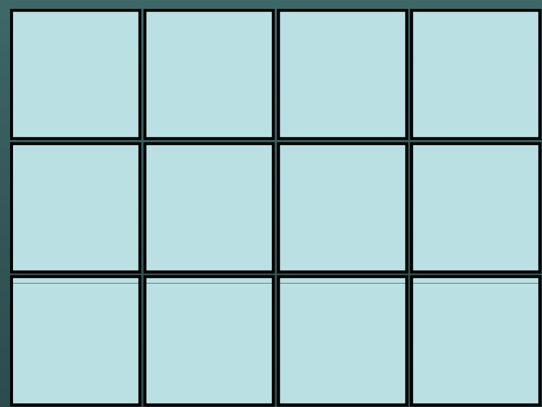
12 = 12 x 1

Visualitzar coses sobre els nombres
i les seves propietats…

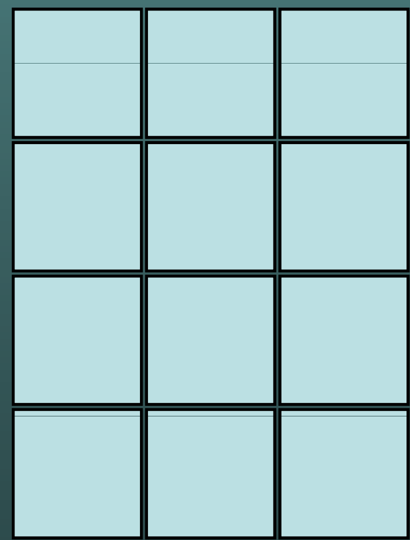
Els nombres que no són primers
admeten diverses representacions…



12 = 6 x 2



12 = 3 x 4



12 = 4 x 3

EXERCICI 1

El llenguatge dels nombres és internacional...
Sabríeu respondre sense saber xinès?

4.按规律填数.

(1)0,1,1,2,3,5,____ (2)1,3,7,15,31,____

(上海市《少年报》小学生数学能力水平有奖测试题)

5.按规律填数

(1)2,7,12,17,____,____ (2)2,8,32,128,____,____

(第二届新苗杯小学生数学联赛试题)

6.在下面的一组数中,有一个数"与众不同",请你把它找出来.

2,4,8,16,20

7.观察下列模式,求 x 的值.

1	2
4	3

(1)

1	3
15	7

(2)

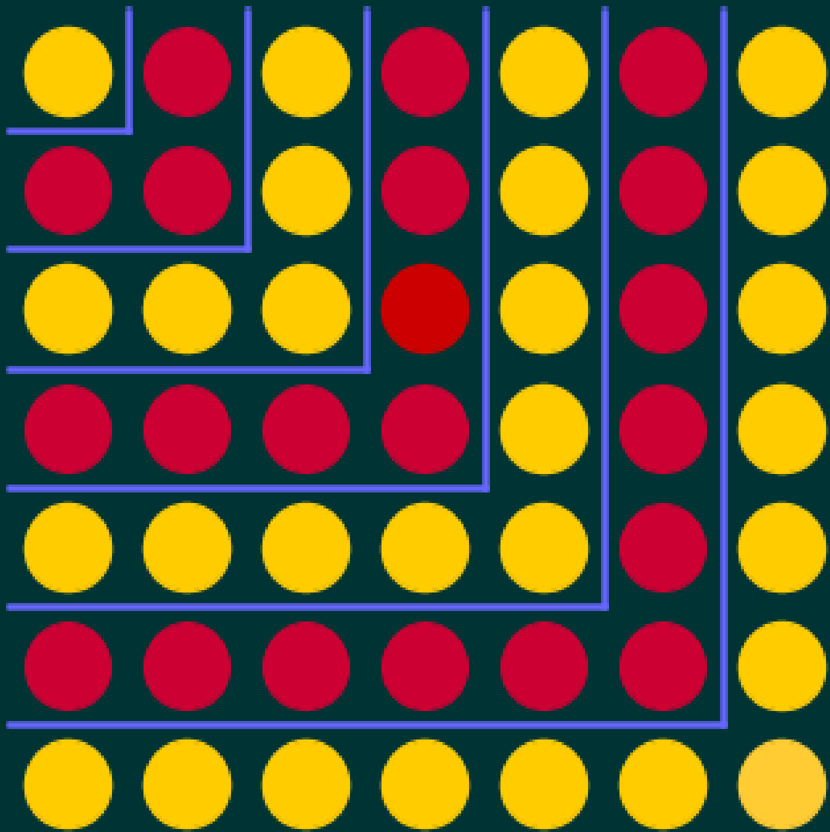
1	4
x	13

(3)

EXERCICI 2

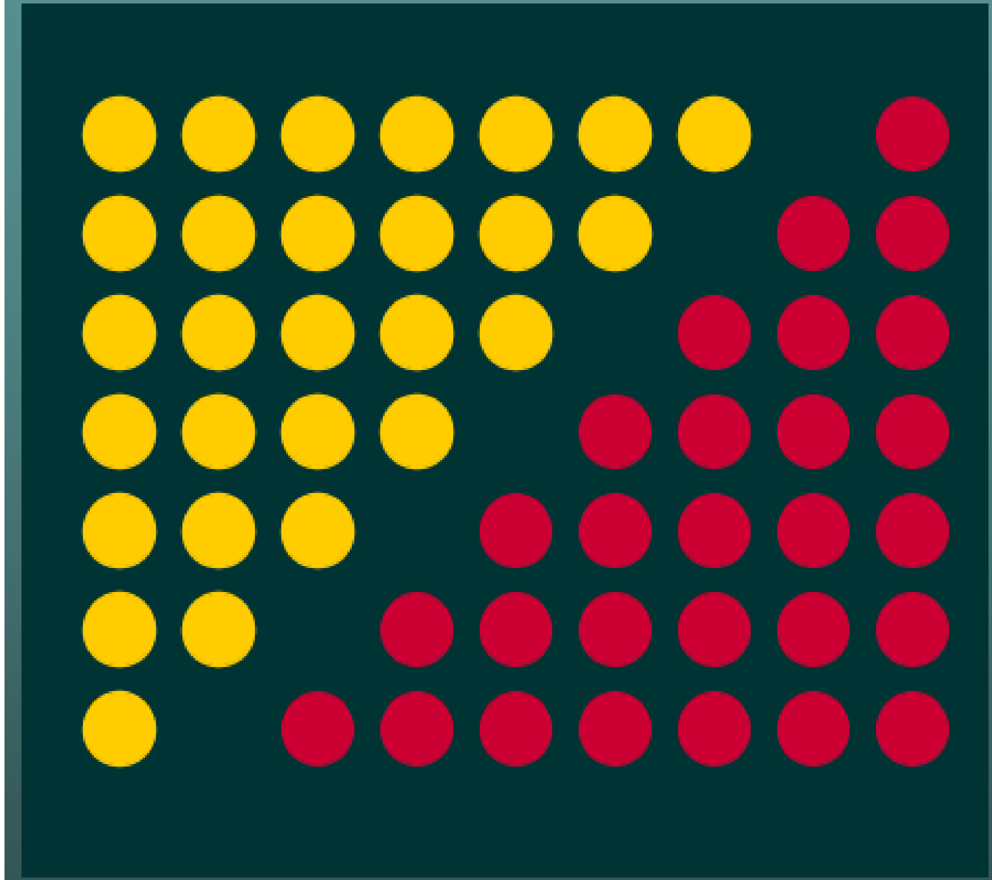
Què “demostra” aquesta imatge?

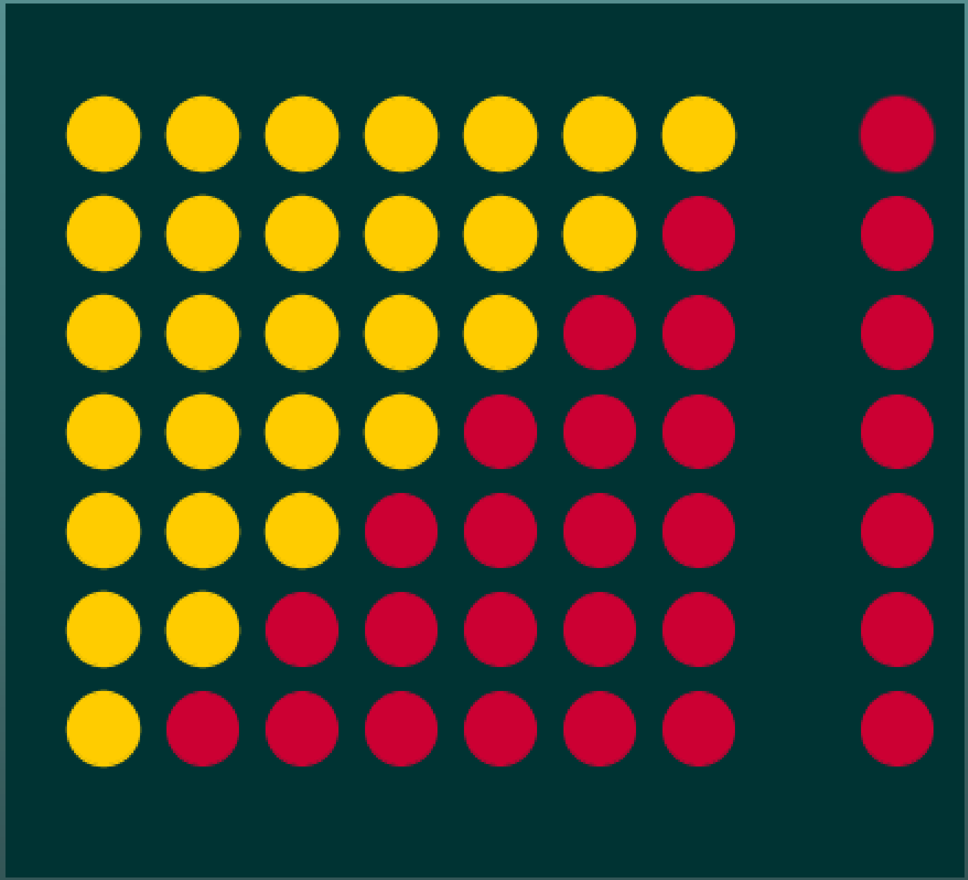
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + …+ (2n-1) = ?



I aquesta?

$$2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n) = ?$$





Dossier pàgines 1 a 9: fem-hi una ullada

DIFICULTATS AMB ELS NOMBRES ENTERS

"Dir que la quantitat negativa és menys que res és expressar una cosa que no es pot concebre" Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783)

"Vaig quedar desconcertat quan vaig comprovar que ningú no podia explicar-me per què menys per menys dóna més" Stendhal (1783-1842)

Ascensors que pugen i baixen…

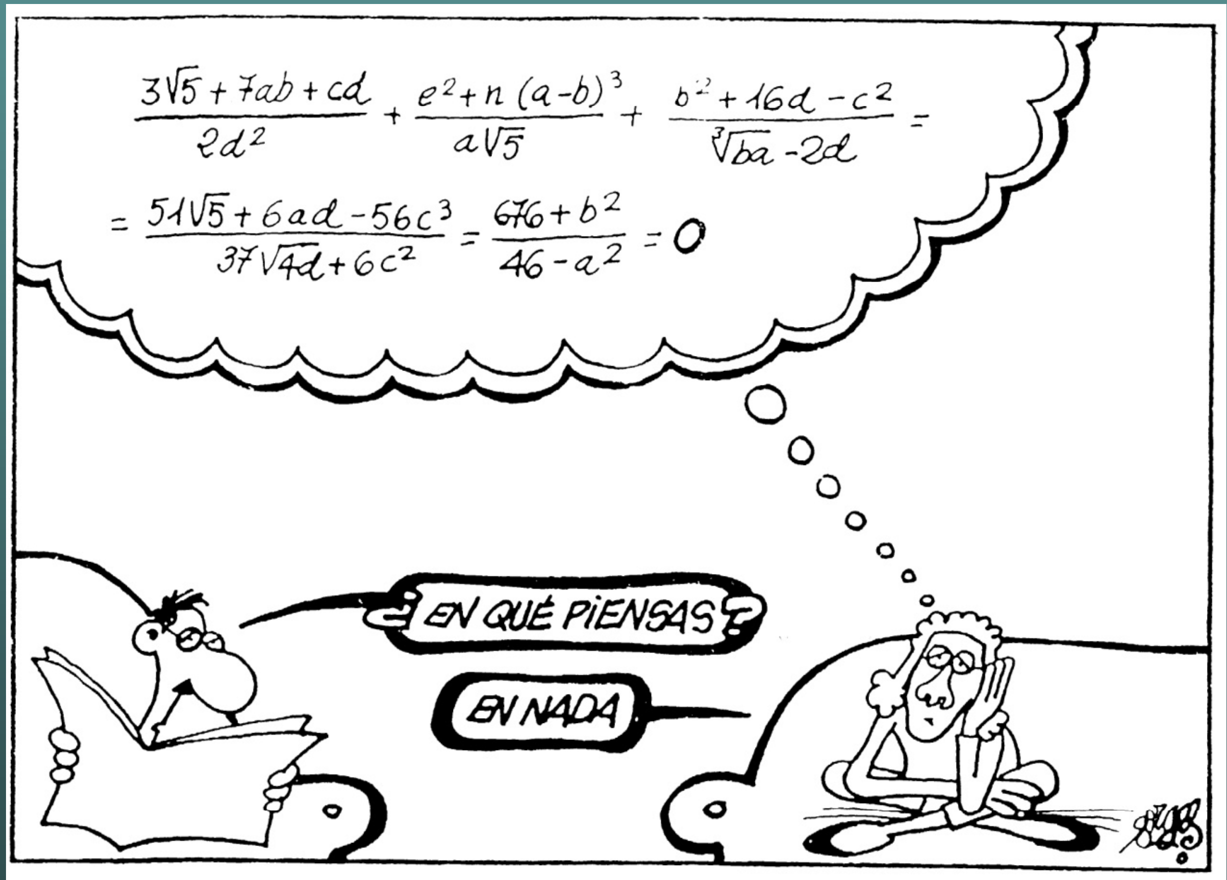
L'ascensor d'un gratacels puja i baixa dues plantes per segon. Som a la planta 0, la planta baixa, i podem calcular on era fa uns segons i on serà dintre d'uns segons, en funció de si baixa o puja...

	On era l'ascensor fa:					**On serà l'ascensor després de:**				
	- 5 s	**- 4 s**	**- 3 s**	**- 2 s**	**- 1 s**	**1 s**	**2 s**	**3 s**	**4 s**	**5 s**
Puja (+ 2 plantes/s)	**- 10**	**- 8**	**- 6**	**- 4**	**- 2**	**+ 2**	**+ 4**	**+ 6**	**+ 8**	**+ 10**
Baixa (- 2 plantes/s)	**+ 10**	**+ 8**	**+ 6**	**+ 4**	**+ 2**	**- 2**	**- 4**	**- 6**	**- 8**	**- 10**

$(-2) \times (-5) = +10$

Dossier pàgines 10 a 12: fem-hi una ullada

NOMBRES RACIONALS



Dos problemes de la formació escolar: les fraccions i els percentatges

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\quad ?$$

El problema dels percentatges…

Henri Poincaré (1854-1912) deia

"*Només hi ha dos mètodes per a ensenyar fraccions: tallar, encara que sigui mentalment, un pastís, o fer-ho amb una poma. Amb qualsevol altre mètode d'ensenyament (sigui aquest axiomàtic o algèbric) els escolars prefereixen sumar numeradors amb numeradors i denominadors amb denominadors*".

La revista Suma de juny del 1999, en un interessant article de títol *Problemas actuales de nuestra educación matemática*, recollia un seguit de recomanacions de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. D'entrada, l'article recollia una anècdota molt reveladora en què s'explica que l'esmentada Real Academia havia convocat una reunió els dies 5 i 6 de febrer de 1999 amb el tema monogràfic "problemes de l'educació matemàtica a primària i a secundària a l'Estat espanyol". A la reunió es va arribar a la conclusió que molts dels objectius que es plantegen i s'assoleixen (en major o menor mesura) a l'àmbit escolar no surten mai d'aquest àmbit i no arriben a formar part dels coneixements pràctics que fa servir una persona adulta a la vida quotidiana. Com a exemple paradigmàtic d'aquesta situació s'explica que, en el decurs de la reunió, es va plantejar si persones de gran formació, l'exercici professional de les quals estigués relativament lluny de l'àmbit matemàtic, conservarien o no la capacitat d'operar amb fraccions senzilles. Sobre la marxa, a la mateixa reunió, es va dur a terme un petit experiment: es va plantejar de fer la suma (1/3) + (1/6) a quatre catedràtics d'universitat (un de dret, un d'història, un de bioquímica i un d'anatomia) amb el resultat que només el bioquímic va ser capaç de fer correctament l'operació.

EXEMPLE

Llegiu la notícia de premsa adjunta amb atenció. Esteu d'acord amb el subtítol que l'acompanya? Per què? Si us sembla correcta, comproveu els càlculs. Si us sembla incorrecta, calculeu quin hauria de ser el percentatge d'encert de triples atorgat al Barça i quants encerts sobre 21 llançaments cal tenir per assolir un percentatge del 87%. A continuació empleneu la taula següent:

	AD. ESTUDIANTES	F.C. BARCELONA
Percentatge d'encert en triples		
Percentatge d'encert en tirs de dos		
Percentatge d'encert en tirs lliures		
Percentatge d'encert global		

AD. ESTUDIANTES, 76
FC BARCELONA, 99

Cuartos: 13-25, 27-45, 44-78, 76-99.
Pista: Vistalegre. 15.000 espectadores.
Adecco Estudiantes: 12 canastas en 37 intentos, más 13 en 29 triples (Brewer 5, Iturbe 5, Azofra 2, Jiménez) y 13 de 18 tiros libres. 35 rebotes (F. Reyes 10). 26 personales y una técnica a Brewer, con Azofra eliminado a los 39'26" (71-97). Brewer (17), Jasen (10), Jiménez (7), F. Reyes (6), Keefe (0); Azofra (6), Loncar (4), Vidaurreta (0), Iturbe (21), Gabriel (3) y Miso (2).
Barcelona: 15 canastas en 28 intentos, más 14 en 21 triples (Navarro 3, Bodiroga 3, Jasikevicius 3, N. Rodríguez 2, De la Fuente 2, Fucka) y 27 de 34 tiros libres. 30 rebotes (De la Fuente 9). 25 personales, con Femerling eliminado a los 34'59" (59-90). N. Rodríguez (9), Navarro (18), Bodiroga (17), Fucka (12), Dueñas (15); Jasikevicius (12), De la Fuente (8), Femerling (5), Alzamora (2), Bravo (1) y Van de Hare (0).
Árbitros: Sancha, Martín Bertrán y García Ortiz.

JUAN ANTONIO CASANOVA
Madrid

Un Barcelona muy distinto al del martes, enormemente autoritario, convencido de su superioridad, acabó de un zarpazo con el síndrome Vistalegre y se aseguró la clasificación para la final de la Liga ACB sin necesidad de es-

CON AUTORIDAD
El equipo azulgrana masacró en triples con un acierto del 87% (14 de 21)

perar al quinto partido, exhibiendo sus razones para ser el gran favorito al título.

Esta vez los nervios traicionaron por completo al equipo madrileño, que no dio su medida porque quiso resolver por la vía individual, a la imagen de un Brewer enloquecido: 5 de 10 en triples, pero 0 de 7 en tiros de dos, antes de marcharse al banco al recibir una técnica. El excepcional 7 de 7 en triples del tercer cuarto es sólo una muestra del magno recital azulgrana, que le permitió alcanzar hasta 37 puntos de ven-

Dossier pàgines 12 a 16: fem-hi una ullada

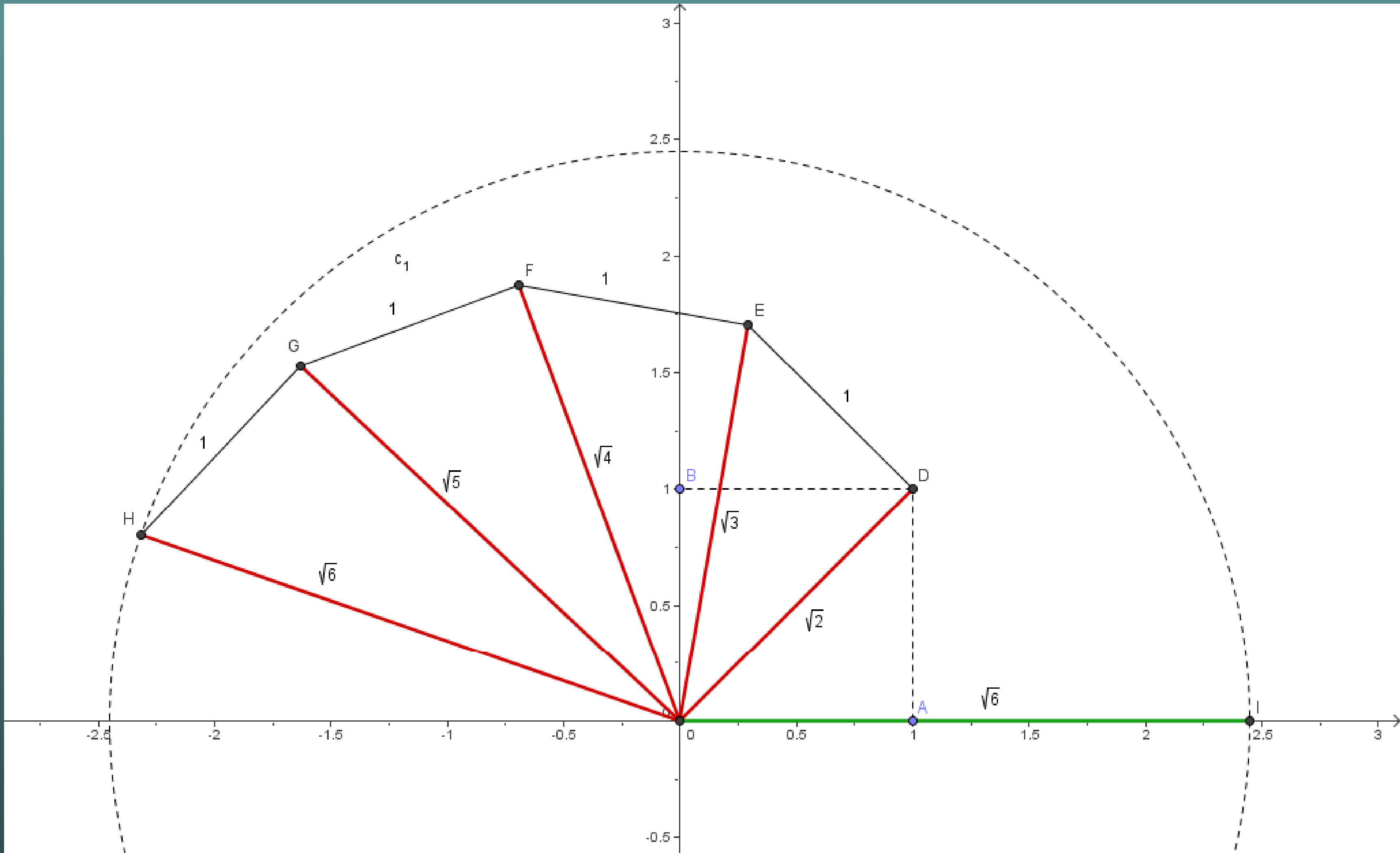
NOMBRES REALS I NOMBRES COMPLEXOS

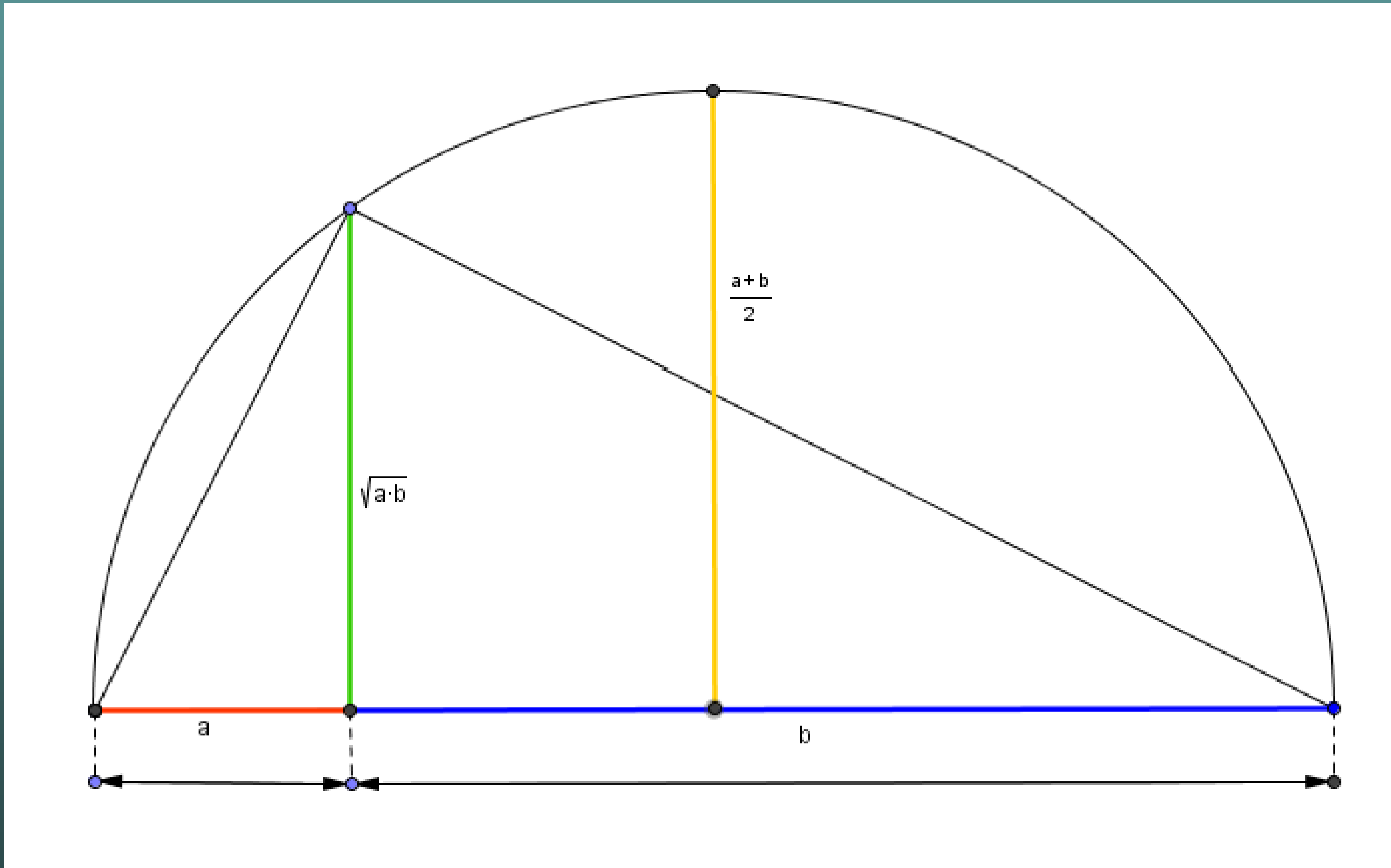
Com presentem els reals?

Què en diem?

Dossier pàgines 16 a 20: fem-hi una ullada

Un parell d'idees per representar radicals





$\frac{a+b}{2}$
$\sqrt{a \cdot b}$
a
b

EXERCICI 3

Vegeu l'annex

Una pàgina amb nombres:
http://www.stetson.edu/~efriedma/numbers.html

Algunes conclusions

1. EN ELS PROBLEMES QUE ES PLANTEGEN A L'AULA HAN DE SORTIR TOT TIPUS DE NOMBRES: NATURALS, ENTERS NEGATIUS, RACIONALS I REALS.

2. L'ARITMÈTICA LÚDICA PROPORCIONA UN EXCEL·LENT CONTEXT PER AL TREBALL A L'AULA.

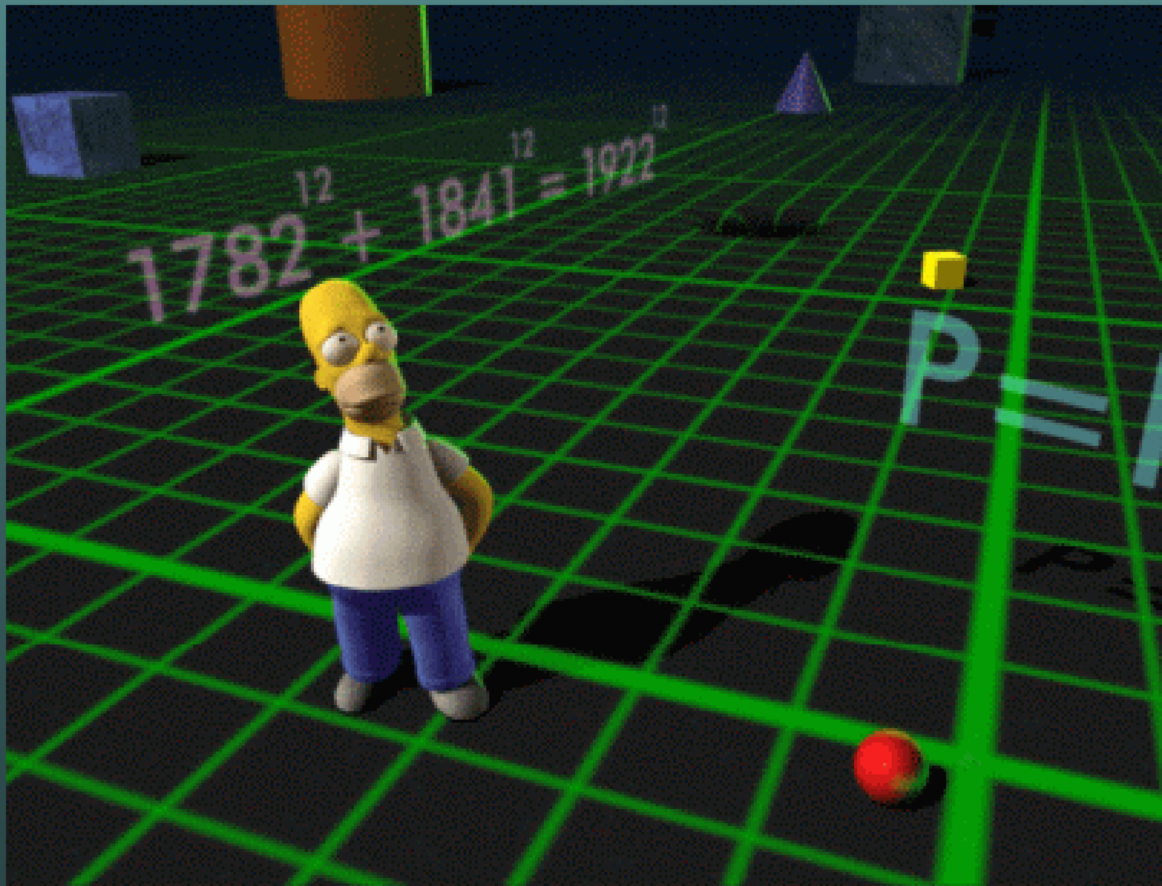
3. ELS PROBLEMES DE RECOMPTE SÓN TAMBÉ UN CONTEXT EXCEL·LENT PER AL TREBALL AMB NOMBRES.

4. ELS ALUMNES HAN DE TENIR UN BON DOMINI TÈCNIC DE LES OPERACIONS. LES OPERACIONS EXCESSIVAMENT COMPLICADES, PERÒ, NO DONEN BON RESULTAT DIDÀCTIC.

5. NO CAL INSISTIR MOLT EN L'ÚS D'ALGUNS ALGORISMES (COM ARA EL DE L'ARREL QUADRADA)

6. ALGUNES PROPIETATS DELS NOMBRES ES PODEN ESTUDIAR INDUCTIVAMENT.

7. ES POT FER DIVULGACIÓ PER EXPLICAR ALGUNS ASPECTES RELLEVANTS DELS CONJUNTS NUMÈRICS.



La igualtat que surt al dibuix dels Simpson

Calculat amb Derive, per exemple, tenim:

$1782^{12} + 1841^{12} = 2541210258614589176288669958142428526657$

$1922^{12} = 2541210259314801410819278649643651567616$

$1782^{12} + 1841^{12} - 1922^{12} = 700212234530608691501223040959$

Amb una calculadora de butxaca, però, el resultat en pantalla ($2541210259 \times 10^{39}$) és aparentment el mateix.

És clar que si fossin iguals, hauríem trobat una solució del Teorema de Fermat i tiraríem tota la demostració de A. Wiles per terra!

Molt agraït per la vostra atenció

Damià Sabaté
Damia.sabate@upc.edu

Institut de Ciències de l'Educació
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

I, per acabar, un divertiment…

Què tenen a veure les qüestions següents?

Una estrella de cinc puntes inscrita en un pentàgon regular.

Una construcció que demostra visualment que 64 = 65.

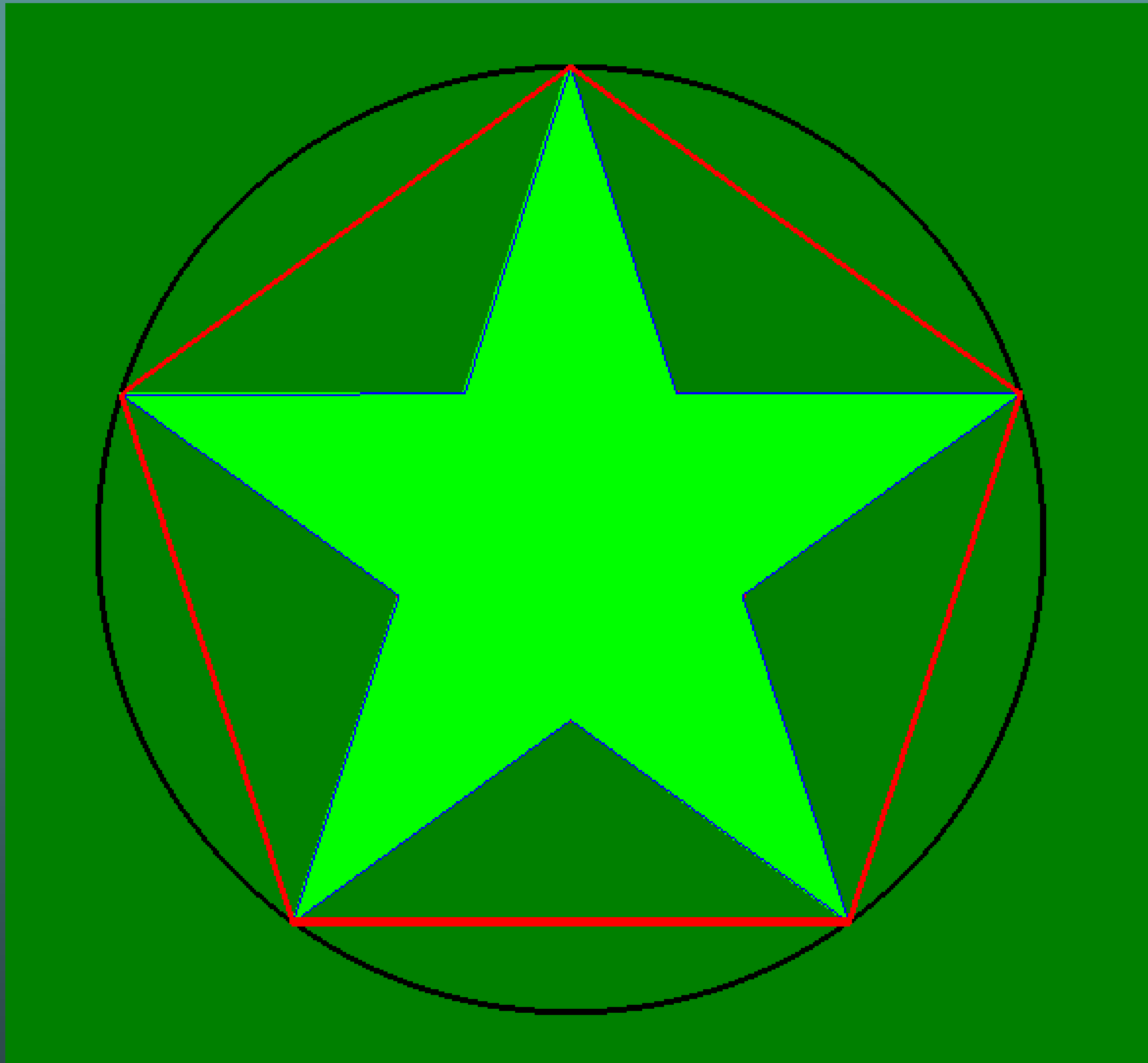
Una fotocòpia d’un llibre de text xinès.

Un dibuix de Leonardo Da Vinci.

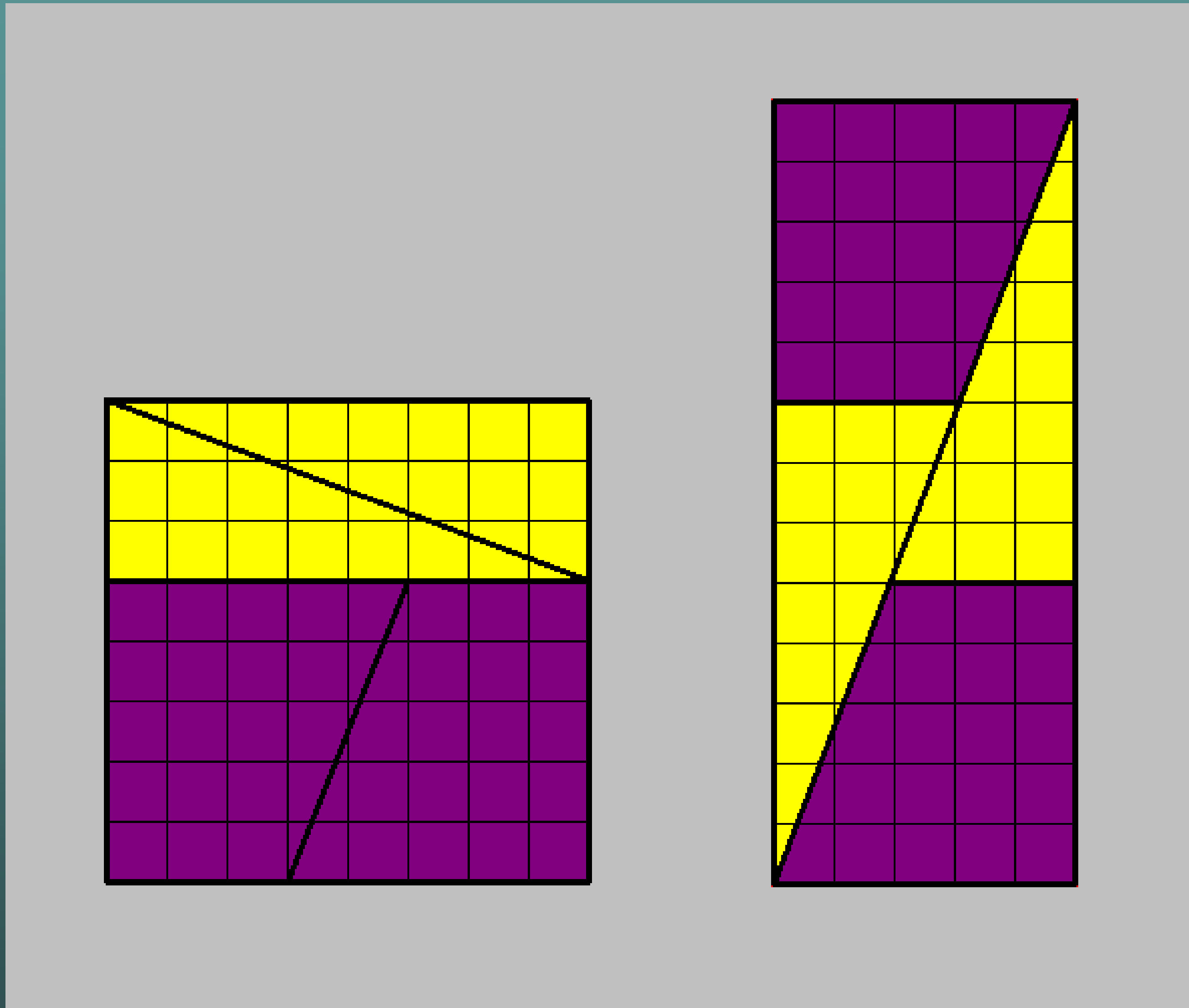
Una el·lipse inscrita entre dues circumferències.

Un poema de Rafael Alberti.

Una estrella de cinc puntes inscrita en un pentàgon regular



Una construcció que demostra visualment que 64 = 65



Efectivament, fixeu-vos que el quadrat té 64 quadrats petits i que el rectangle en té 65. Les quatre peces en què els descomponem (dos triangles i dos trapezis rectangles), però, són iguals. Cal concloure, doncs, que 64 = 65?

Una fotocòpia d’un llibre de text xinès.

4.按规律填数.

(1)0,1,1,2,3,5,____　　(2)1,3,7,15,31,____

（上海市《少年报》小学生数学能力水平有奖测试题）

5.按规律填数

(1)2,7,12,17,____,____　(2)2,8,32,128,____,____

（第二届新苗杯小学生数学联赛试题）

6.在下面的一组数中,有一个数“与众不同”,请你把它找出来.

2,4,8,16,20

7.观察下列模式,求 x 的值.

1	2
4	3

(1)

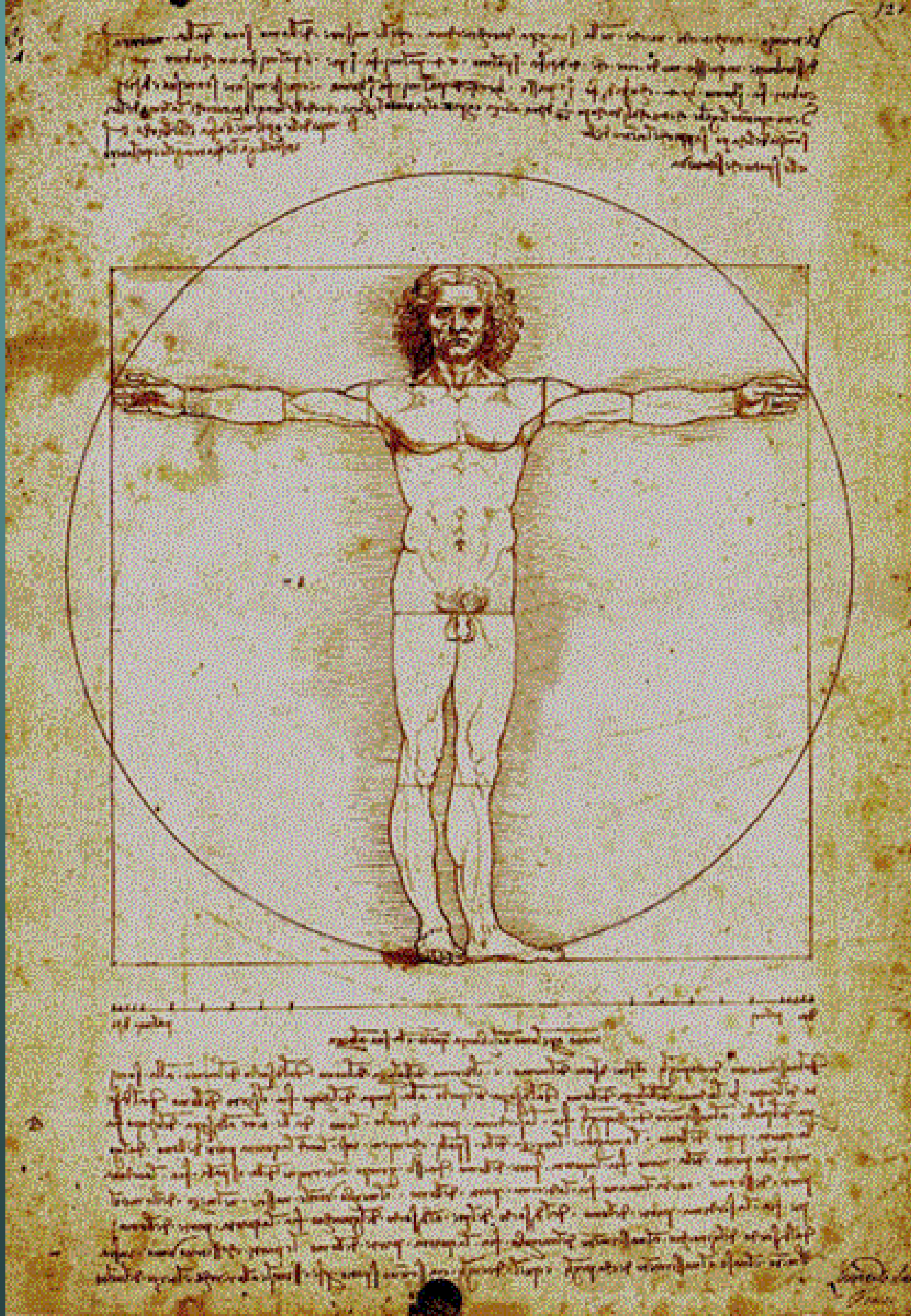
1	3
15	7

(2)

1	4
x	13

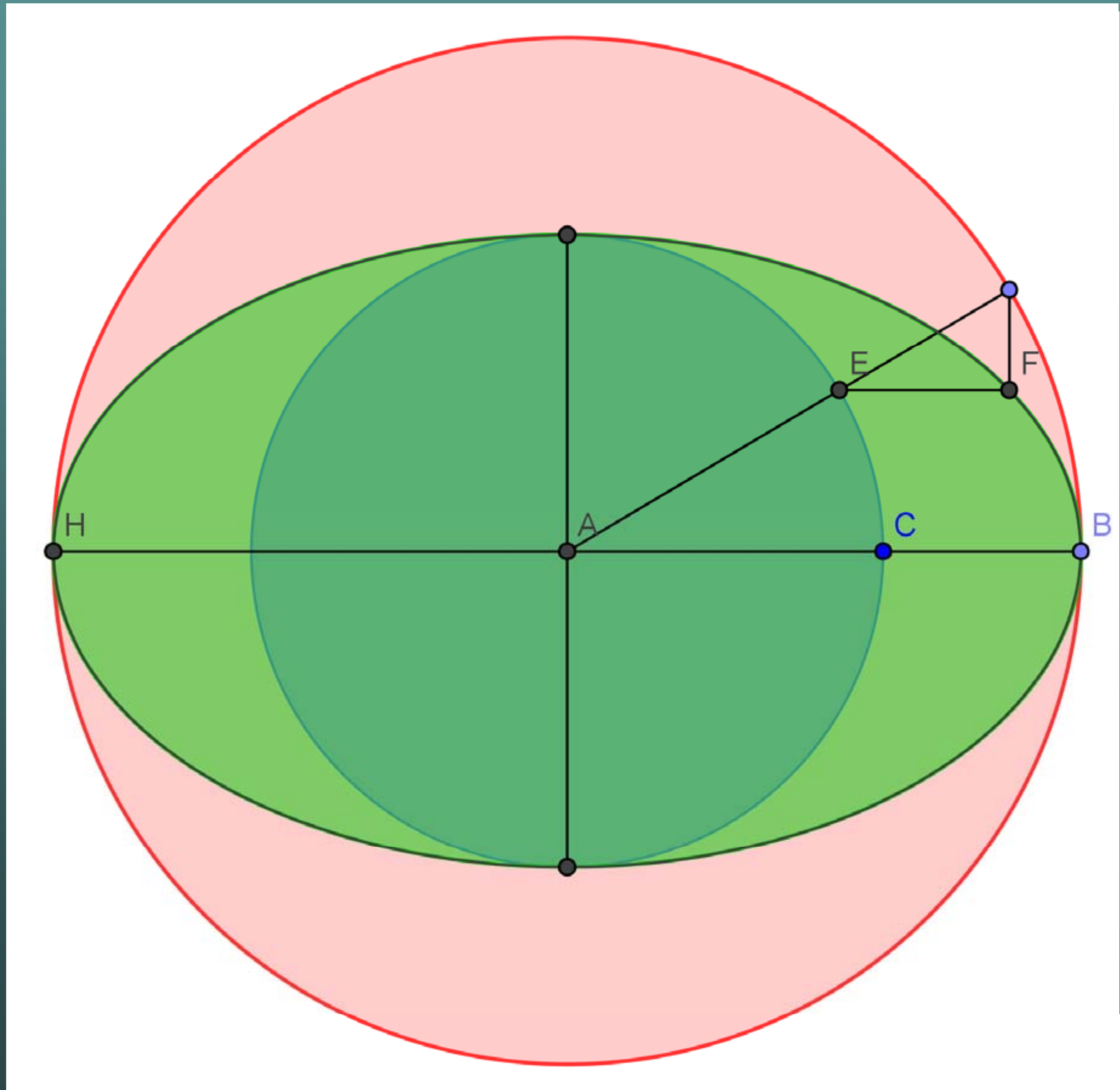
(3)

Un dibuix de Leonardo Da Vinci



Una el·lipse inscrita entre dues circumferències de manera que:

Àrea corona circular = àrea el·lipse



Un poema de Rafael Alberti

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.
A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el universo armónico origina.
A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

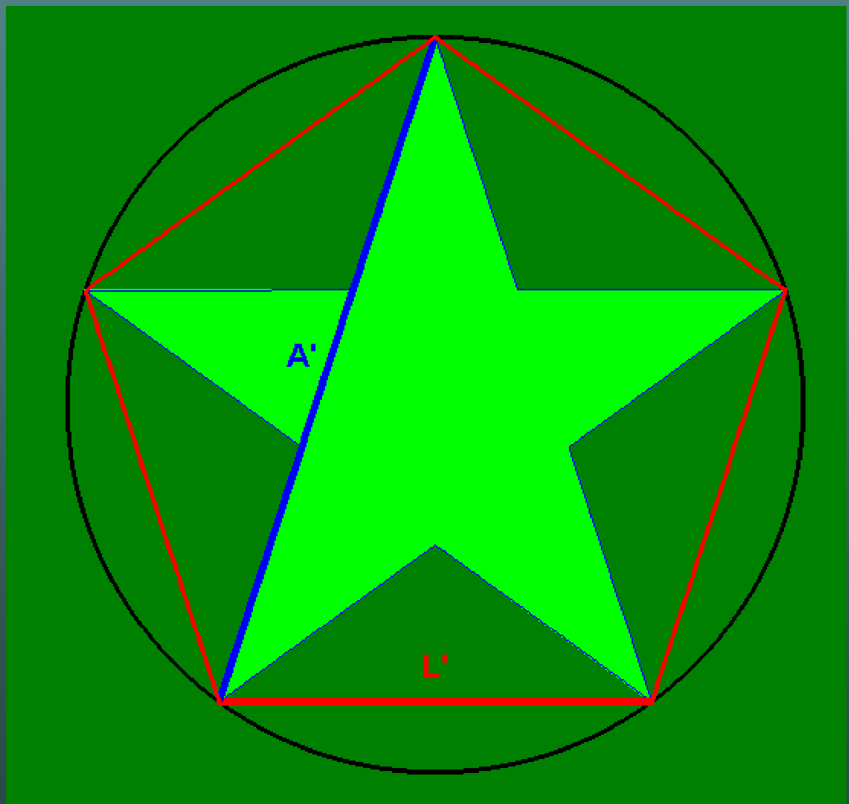
Rafael Alberti. *Poemas del destierro*, 1946.

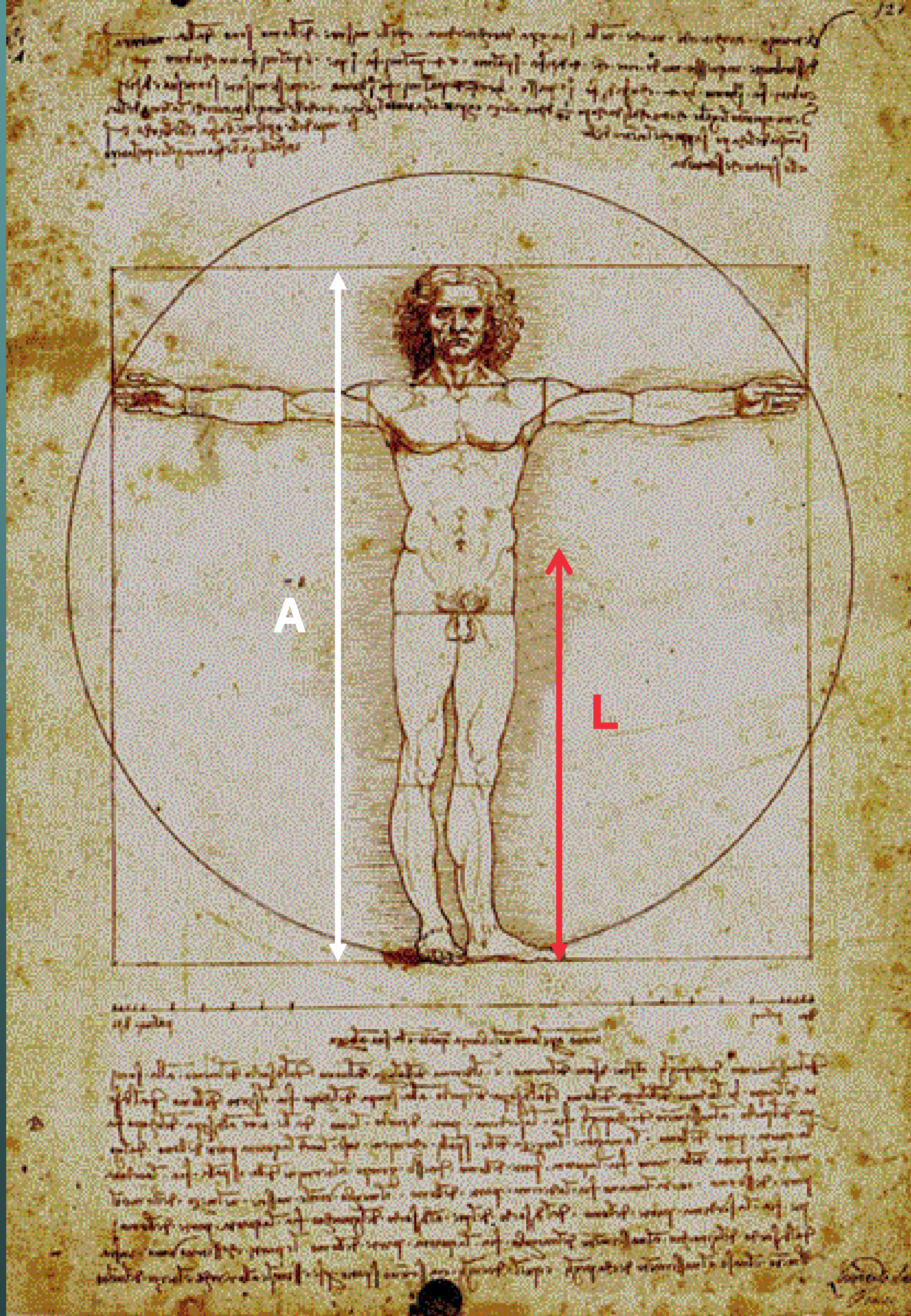
El poema de Rafael Alberti, dedicat a la divina proporció, ens dóna la clau. Al darrera de tot plegat hi ha el nombre d'or:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$$

Efectivament, tenim:

$$\frac{A}{L} = \frac{A'}{L'} = \Phi$$





DE PAS, FIXEU-VOS COM N'ÉS DE GRAN L'INVENT DEL SISTEMA DE NUMERACIÓ DECIMAL! FINS I TOT A LA XINA EL FAN SERVIR!

4.按规律填数.

(1)0,1,1,2,3,5,___　　(2)1,3,7,15,31,___

（上海市《少年报》小学生数学能力水平有奖测试题）

5.按规律填数

(1)2,7,12,17,___,___　　(2)2,8,32,128,___,___

（第二届新苗杯小学生数学联赛试题）

6.在下面的一组数中,有一个数"与众不同",请你把它找出来.

2,4,8,16,20

7.观察下列模式,求 x 的值.

1	2
4	3

(1)

1	3
15	7

(2)

1	4
x	13

(3)

La successió de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Aquesta famosa successió va ser recollida per Leonardo da Pisa, més conegut com Fibonacci, en el seu extraordinari Liber Abaci (1202) i té molt a veure amb el nombre d'or...

La successió de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,...

$$\frac{610}{377} = 1{,}618\ldots$$

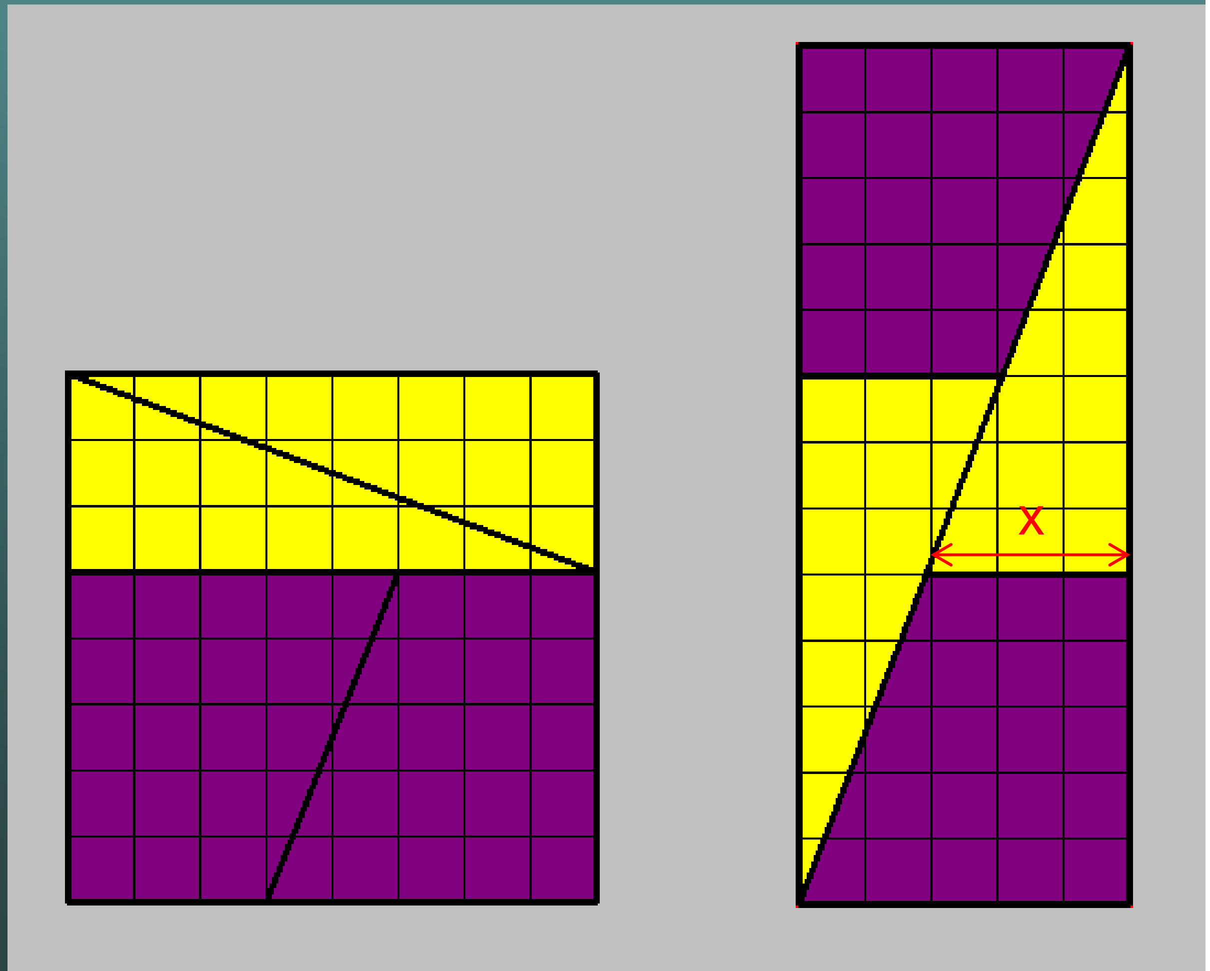
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \Phi$$

Certament, tots sabem que 64 no coincideix amb 65 i que hi ha algun engany en el plantejament. El que cal és trobar-lo. De fet, el que passa és que fem una suposició oculta: el triangles del quadrat són de catets 3 i 8 i els trapezis de bases 5 i 3 i d'altura 5; en canvi, els triangles i els trapezis que componen el rectangle tenen una de les bases que només de manera aparent val 3. La podem calcular fent ús del teorema de Tales:

$$\frac{x}{5} = \frac{8}{13} \Leftrightarrow x = \frac{40}{13} \simeq 3{,}077$$

El quadradet perdut es reparteix entre les quatre peces i resulta difícil veure-ho a simple vista.

I això què té a veure amb el nombre d'or? Doncs que els nombres que s'han emprat per fer la construcció de les peces, 3, 5, 8 i 13, són termes consecutius de la successió de Fibonacci. De fet, és possible muntar construccions i paradoxes anàlogues amb qualssevol 4 nombres consecutius d'aquesta successió.



També aquí al darrera s'hi amaga el nombre d'or:

La condició (Àrea corona circular compresa entre *C* i *C´* = àrea el·lipse de semiexos *a* i *b* és equivalent a:

$$\pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot a^2 - \pi \cdot b^2$$

Simplifiquem el factor comú p i dividim la igualtat per b^2 :

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2} - 1 \Leftrightarrow \text{ (posem } \frac{a}{b} = x > 0) \; x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Com que hem de descartar la solució negativa, concloem que la proporció entre els semiexios de l'el·lipse és àuria.